Разработка урока по теме: «Алгебраические уравнения»

Преподаватель: Джабиров А.У.

г. Ташкент, 2020

План:

1. **Краткая историческая справка**
2. **Уравнения с одной переменной**

а) Уравнения 1-ой степени
б) Квадратные уравнения
в) Кубические уравнения
г) Уравнения 4-ой степени
д) Уравнения выше 4-ой степени
е) Биквадратные уравнения
ж) Двучленные кубические уравнения
з) Иррациональные уравнения

3. **Линейные уравнения с 2-мя, 3-мя и т.д. переменными**

а) Система 2-х линейных уравнений с 2-мя переменными
б) Система 3-х линейных уравнений с 3-мя переменными
в) Система 4-х, 5-ти и т.д. линейных уравнений с 4-мя, 5-тью и т.д. переменными

4. **Показательные уравнения**
5. **Логарифмические уравнения**

Краткая историческая справка

Решение уравнений 1-й и 2-й степеней известно еще с древности(со времён Диофанта). К уравнениям 2-й степени (т. н. квадратным) древнегреческие математики пришли, по-видимому, геометрическим путём, т. к. задачи, приводящие к этим уравнениям, естественно, возникают при определении площадей и построении окружности по различным данным. Однако в одном, очень существенном отношении решение уравнений у древних математиков отличалось от современного: они не употребляли отрицательных чисел. Поэтому даже уравнение 1-й степени (с точки зрения древних)не всегда имело решение. При рассмотрении уравнений 2-й степени приходилось различать много частных случаев (по знакам коэффициентов). В 16 в. итальянскими математиками найдены решения уравнений 3-й и 4-й степеней.

Для уравнения вида $x^3 + px + q = 0$ (к которому можно привести всякое уравнение 3-й степени) впервые была применена формула Кардано, хотя вопрос о том, была ли она найдена самим Дж. Кардано или же заимствована им у других математиков, нельзя считать вполне решенным. Метод решения алгебраических уравнений 4-й степени указал Л. Феррари. После этого начались настойчивые поиски формул, которые решали бы уравнения и высших степеней подобным образом. Эти поиски продолжались около трёх столетий, и лишь в начале 19 в. Н. Абель и Э. Галуа доказали, что решения уравнений степени выше 4-й, вообще говоря, нельзя выразить через коэффициент уравнения при помощи алгебраических действий. К. Гауссом был предложен другой способ решения таких уравнений (который позднее был назван его именем). Он установил (1799), что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней (решений), действительных или мнимых.

Алгебраические уравнения с 1-ой переменной

Общий вид

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{F(x)}{R(x)} \qquad (*)$$

Где x – переменная величина; P (x), Q (x), F (x) и R (x) – выражения, содержащие переменную, причём Q (x) ≠ 0, R (x) ≠ 0. Для решения (*) воспользуемся главным свойством пропорции

$$P(x)\cdot R(x) = Q(x)\cdot F(x) \qquad (**)$$

(**) после преобразований может стать одним из следующих:

$1.\ ax + b = 0$ - уравнение 1-ой степени.

Решение: $ax = -b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

$2.\ ax^2 + bx + c = 0$ - квадратное уравнение.

Решение: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант.

Здесь возможны случаи:

D>0, уравнение имеет два корня, выраженных действительными числами;

D=0, уравнение имеет один корень;

D<0, уравнение имеет два корня, представленных комплексными числами. $x_1 = m - nj$ и $x_2 = m + nj$, где $j = \sqrt{-1}$.

$3.\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ - кубическое уравнение.

$$4. ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

- уравнение 4-ой степени.

Кубические и уравнения четвёртой степени решаются по сложным формулам, которые вывел итальянский математик Кордано (17в.) (смотри специальные справочники).

$$5. ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+m=0$$, где n=5,6,7,…,k.

Общие формулы для нахождения корней уравнения выше 4- ой степени не существует. Такие уравнения решают с помощюь компьютеров; в некоторых частных случаях они решаются с помощью искусственных приёмов.

Отметим уравнения:

$$6. ax^4+bx^2+c=0.$$

Это частный случай уравнения 4, называется оно биквадратным.

Решение: $x^2=y$ и тогда получаем

$$ay^2+by+c=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$$ где $D=b^2-4ac;$

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a}}.$$

$7.\, ax^3 \pm b = 0 -$ двучленное кубическое уравнение.

Решение: $ax^3 \pm b = 0 \,\Big|\, : a \Rightarrow x^3 \pm \frac{b}{a} = 0$

Представляя далее $\frac{b}{a} = c^3,$ получаем $x^3 \pm c^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \pm c)\left(x^2 \pm xc + c^2\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \pm c = 0 \text{ - уравнение 1- ой степени.} \\ x^2 \pm xc + c^2 = 0 \text{ -квадратное уравнение.} \end{array}\right.$

Примеры:

1. Найти x из уравнения $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+5}{x-2}$

Решение: Ограничения: $x \neq -1$, $x \neq 2$.

По свойству пропорции имеем $(2x – 3) \cdot (x – 2) = (x + 1) \cdot (2x + 5) \Rightarrow 2x^2 – 4x – 3x + 6 = 2x^2 + 5x + 2x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow - 4 – 3x – 5x – 2x = 5 – 6 \Rightarrow -14x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{14}$

2. Найти x из уравнения $\frac{kx-m}{nx+k}=\frac{n}{3}$

Решение: $(kx – m) \cdot 3 = n (nx + k) \Rightarrow 3kx – 3m = n^2x + nk \Rightarrow 3kx – n^2x = nk + 3m \Rightarrow x (3k – n^2) = nk + 3m \Rightarrow x = (nk + 3m)/(3k – n^2)$.

3. Найти H из уравнения $P = \gamma \cdot \dfrac{mM}{(R+H)^2}$

Решение:

$$\frac{P}{1} = \frac{\gamma mM}{(R+H)^2} \Rightarrow P(R+H)^2 = \gamma mM \Rightarrow (R+H)^2 = \frac{\gamma mM}{P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R + H = \sqrt{\frac{\gamma mM}{P}} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{\gamma mM}{P}} - R.$$

4. Найти x из уравнения $E = \dfrac{I \cdot x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

Решение: $\dfrac{E}{1} = \dfrac{I \cdot x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$

Возьмём в квадрат обе части полученного равенства, получим

$$\frac{E^2}{1} = \frac{I^2 x^2}{R^2 + x^2} \Rightarrow I^2 x^2 = E^2 (R^2 + x^2) \Rightarrow I^2 x^2 = E^2 R^2 + E^2 x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I^2 x^2 - E^2 x^2 = E^2 R^2 \Rightarrow x^2 (I^2 - E^2) = E^2 R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{E^2 R^2}{I^2 - E^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{E^2 \cdot R^2}{I^2 - E^2}} = \frac{E \cdot R}{\sqrt{I^2 - E^2}}.$$

5. *Найти d из уравнения* $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$

Решение:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{F}^{\backslash f} - \frac{1}{f}^{\backslash F} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{f - F}{F \cdot f} \Rightarrow d(f - F) = F \cdot f \Rightarrow d = \frac{F \cdot f}{f - F}.$$

8. Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения – это уравнения, содержащие переменную величину под знаком корня того или иного показателя.

Примеры:

1. $\sqrt{x+2} + x = 2;$
2. $\sqrt{x+8} + \sqrt{x-10} = 4;$
3. $\sqrt[3]{2x^2 - 9x + 8} - x = 3;$
4. $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x+6} = 6.$

Решение иррациональных уравнений сводится к освобождению их от корней.

$$\sqrt[2n]{F(x)} \geq 0$$

Примечание:

1. Если в иррациональные уравнения входят корни чётной степени, то предполагается, что они имеют только арифметические значения, т.е.

2. Иррациональные уравнения необходимо проверять, так как в процессе освобождения от корней могут появиться «лишние», посторонние решения.

3. Значения переменной, выраженные комплексными числами, из решения исключаются.

Примеры решений иррациональных уравнений:

1. Решить уравнение
Решение:

$$\sqrt{x+3}+x=9.$$

$$\sqrt{x+3}+x=9 \Rightarrow \sqrt{x+3}=9-x \uparrow \Rightarrow x+3=81-18x+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-19x+78=0 \Rightarrow x_1=6; x_2=13.$$

Очевидно, что $x_2=13$ не является решением данного уравнения.

Ответ: $\{6\}.$

2. Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-5}+3=0.$

Решение: Перенося 3 в правую часть, получаем

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-5}=-3 \Rightarrow \emptyset,$$

т.к. два положительных числа или нули в сумме не могут дать отрицательное значение.

3. Решить уравнение $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}=4.$

Решение:

Оставляя в левой части один из радикалов, получим

$$\sqrt{x+10}=4-\sqrt{x+2}\uparrow\Rightarrow x+10=16-8\sqrt{x+2}+x+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{x+2}=8\Rightarrow\sqrt{x+2}=1\uparrow\Rightarrow x+2=1\Rightarrow x=-1$$

Ответ: {-1}.

4. Решить уравнение $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4)$

Решение: Уединение корня и возведение обеих частей уравнения в квадрат привело бы к громоздким преобразованиям. В то же время, если проявить некоторую наблюдательность, можно заметить, что данное уравнение легко сводится к квадратному, если обе его части умножить на 2.

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12\Rightarrow$$

Действительно $2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0.$

Полагая далее $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$, получим

$$y^2-2y-8=0 \Rightarrow y_1=-2; y_2=4.$$

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=4 \quad \sqrt{2x^2-3x+2}=y$$

Имеем $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$ и .

Очевидно, что второе уравнение решений не имеет, остаётся решить

. Возведя обе части в квадрат, получим

$$2x^2-3x+2=16 \Rightarrow 2x^2-3x-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-2; x_2=3{,}5.$$

Проверка покажет, что оба найденных значений x являются решениями

данного уравнения.

Ответ: {-2; 3,5}.

5. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x}.$

Решение: Возьмём обе части ~~данного уравнения в квадрат~~ и уединим затем оставшийся радикал: $x-2+2\sqrt{(x-2)(x-1)}+x-1=2+x=$

$$2\sqrt{(x-2)(x-1)}=5-x\uparrow\Rightarrow$$

$$4(x-2)(x-1)=25-10x+x^2\Rightarrow$$

$$3x^2-2x-17=0\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{1+2\sqrt{13}}{3};x_2=\frac{1-2\sqrt{13}}{3}.$$

Проверка: Проверять найденные корни подстановкой в исходное уравнение затруднительно, да и оказывается нецелесообразным. Поступим следующим образом. Найдём область определения данного уравнения. Из системы неравенств:

$$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ 2+x\geq 0, \end{cases}\quad x\in[2;\infty).$$

Находим, что этой областью является множество значений

Выясним, принадлежат ли найденные корни этому промежутку.

Имеем $x_1 - 2 = \dfrac{1+2\sqrt{13}}{3} - 2 = \dfrac{1+2\sqrt{13}-6}{3} = \dfrac{\sqrt{52}-\sqrt{25}}{3} > 0,$

следовательно, $x_1 > 2$, т. е. $x \in [2; \infty)$, и ,значит, может являться корнем заданного уравнения.

Далее найдём разность $x_2 - 2$:

$$x_2 - 2 = \frac{1-2\sqrt{13}}{3} - 2 = \frac{1-2\sqrt{13}-6}{3} < 0 \Rightarrow x_2 < 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2$ не принадлежит промежутку $[2; \infty)$ и, значит, не является корнем данного уравнения.

$$2\sqrt{x^2-3x+2} = 5 - x$$

Вернёмся теперь к x_1.

Выясним знак разности, находящийся в правой части уравнения

Имеем $5 - x_1 = 5 - \dfrac{1+2\sqrt{13}}{3} = \dfrac{15-1-2\sqrt{13}}{3} = \dfrac{14-2\sqrt{13}}{3} > 0.$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{1+2\sqrt{13}}{3}$

является корнем уравнения $2\sqrt{x^2-3x+2} = 5-x.$

А так как это уравнение равносильно данному, то $x = \dfrac{1+2\sqrt{13}}{3}$ и будет его решением.

6. Найти x из уравнения $x^2 - 3mx + 2m^2 - mn - n^2 = 0$

Решение: Здесь $a=1$, $b=-3m$, $c=2m^2 - mn - n^2$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}.$$

$$D = b^2 - 4ac = 9m^2 - 4(2m^2 - mn - n^2) =$$

$$= 9m^2 - 8m^2 + 4mn + 4n^2 = m^2 + 4mn + 4n^2 = (m+2n)^2;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{(m+2n)^2} = m + 2n;$$

$$x_1 = \frac{3m-(m+2n)}{2} = \frac{2m-2n}{2} = m-n;$$

$$x_2 = \frac{3m+(m+2n)}{2} = \frac{4m+2n}{2} = 2m+n.$$

7. Решить уравнение $x^3+2x^2-3=0$.

Решение: Представим $2x^2=3x^2-x^2$, тогда получим $x^3+2x^2-x^2-3=0$.

Группируя 1 с 3-им членом и второй с 4-ым, получим

$$(x^3-x^2)+(3x^2-3)=0 \Rightarrow x^2(x-1)+3(x^2-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)+3(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+3x+3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \Rightarrow \quad x_1=1, \\ x^2+3x+3=0 \Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{-9\mp\sqrt{3}j}{2} \end{array}\right.$$

Показательные уравнения

– это уравнения,
содержащие переменную величину в показатель правой или левой частях уравнения, или справа и слева одновременно.

Например: $5^{x^3-16x}=1;$ $2^{x^2-4x}=8^{x-2}$ и др.

Наиболее распространены показательные уравнения:

1. $a^{F(x)}=1.$ $1=a^0$ $a^{F(x)}=a^0 \Rightarrow F(x)=0.$

Здесь *F(x)* – выражение, содержащие *x*; *a* – основание, $a>0$; $a\neq 1$.

Решение: Т.к $a^{F(x)}=b.$, то имеем. Получили одно из уравнений группы *A*.

2. Здесь возможны два варианта:

а) $b = a^k$ и тогда $a^{F(x)} = a^k \Rightarrow F(x) = k;$

б) $b \neq a^k$, т.е имеем $a^{F(x)} = b$ решается путём логарифмирования - $F(x) = \log_a b$, отсюда находится x.

3. $A \cdot a^{F(x)} + B \cdot a^{F(x)} = C$

$$a^{F(x)} \cdot (A + B) = C \Rightarrow a^{F(x)} = \frac{C}{A+B}.$$

,где А, В и С –дейст. числа.

Решение: $A \cdot a^{2F(x)} + B \cdot a^{F(x)} + C = 0,$

Обозначая первую часть этого уравнения через b, получаем

$a^{F(x)} = b$ (см. пункт 2).

4. $A \cdot z^2 + B \cdot z + C = 0$ где А, В и С –действ.числа.

Решение: Примем $a^{F(x)} = z$, тогда получим уравнение, из которого находится z_1 и z_2, а затем значения x.

Примеры:

1. *Решить уравнение* $5^{x^2-2x-6}=25$

Так как, $25=5^2$ то получаем $5^{x^2-2x-6}=5^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-2x-6=2 \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-2; \quad x_2=4.$$

2. *Решить уравнение*

Принимая $3^x=z$ получаем $z^2-8z-9=0 \Rightarrow z_1=-1; z_2=9.$

не подходит, т.к. (при любом x), поэтому

остаётся . Имеем $3^x=0$ $a^x>0$

$z_1=-1$ $z_2=9$ $3^x=9 \Rightarrow x=2.$

3. Решить уравнение $2^{x+3}+2^{x}=72.$

$$2^{x}\cdot 2^{3}+2^{x}=72\Rightarrow 2^{x}\cdot(2^{3}+1)=72\Rightarrow 2^{x}=8\Rightarrow x=3.$$

Так показатели складываются при умножении степеней, то данное уравнение перепишем так: $0{,}1\cdot 10^{2x-3}=2^{x-2}\cdot 5^{x-2}\cdot 100^{x+2}.$

$$0{,}1=10^{-1} \qquad 2^{x-2}\cdot 5^{x-2}=10^{x-2}$$

$$10^{-1}\cdot 10^{2x-3}=10^{x-2}\cdot 10^{2x+4}\Rightarrow 10^{2x-4}=10^{3x+2}\Rightarrow$$

5. Решить уравнение

Так как и ,то получаем

$$\Rightarrow 2x-4=3x+2\Rightarrow x=-6.$$

Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения – уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма или в его основании.

Наиболее распространённые логарифмические уравнения:

1. $\log_a F(x) = k.$ $F(x) = a^k$

Решение: $\log_a F(x) = \log_a P(x).$, отсюда находится x.

2. $A \cdot \log_a^2 F(x) + B \cdot \log_a F(x) + C = 0.$

Решение: Равным логарифмам соответствуют равные числа, т.е.

3.*Решение:* Принимая , получим уравнение $\log_a F(x) = z$

$A \cdot z^2 + B \cdot z + C = 0$, отсюда находится z_1 и z_2, а затем x_1 и x_2.

$$\log_a F(x) + \log_b Q(x) + \log_c P(x) = m.$$

Для решения этого уравнения необходимо все логарифмы привести к одному основанию: a или 10.

Примечание: ***Все логарифмические уравнения обязательно проверяются***

Решить самостоятельно следующие логарифмические уравнения:

1).	$\log_3(x^2-5x+9)=2$	$\{0;5\}$
2).	$\log_2(x^2-4x+8)-3=0$ $\log_2\log_3\log_4(x-4)=0$	$\{-4;0\}$.
3).	$\log_{1/2}\log_8 x^2-2x/x-3=0$	$\{65\}$.
4).	$\log_{5-x}(x^2-2x+65)-2=0$	$\{4;6\}$.
5).	$\lg(3^{\sqrt{2x-1}}+1)-1=0$ $\log_4\log_2\log_3(2x-1)=1/2$	$\{5\}$.
6).	$\log_{x^2}(x+2)-1=0$	$\{2,5\}$.
7).	$\log_x(x^2-4x-8)-2=0$	$\{41\}$.

Решить самостоятельно следующие показательные уравнения.

1). $3^{x^2-4x}=1$

$(1/2)^{x^2-2x-8}=1$

2). $(1/5)^{x^2-x-20}-1=0$

3). $7^{x+2}-5^{x+2}=0$

$5^{x-4}-10^{x-4}=0$

4). $7^{x-2/x+3}-1=0$

5). $2^{2x^2-3x}-4=0$

6). $2^{x^2+5x}+4=0$

7). $5^{x+3}+25=0$

$2^{x^2-6x+0,5}=1/16\sqrt{2}$

8). $2^x\cdot 5^x=0,01\cdot 10^{3-x}$

9). $0,1\cdot 10^{2x-3}=1000^{x-2}$

10). $100\cdot(0,1)^{x-1}-100^x=0$

$0,2^{2x+8/x-2}-125=0$

{0;4}

{-2;4}

{-4;5}

{-2}

{4}

{2}

{-1/2;2}

{∅}

{∅}

{2;3}

Решить следующие уравнения.

1). $2x-3/x+2=2x/x$ $\{-5/6\}$

2). $3x+2/x-5=3x-4/x+1$ $\{5/12\}$

3). $x/2x-4-x+5/2x+3=0$ $\{20/3\}$

4). $2x^2-3x-2=0$ $\{-1/2;2\}$

5). $x^2-4x+20=0$ $\{2-4j;\ 2+4j\}$

6). $½(x-2)-1/3(3x-7)=1/x$ $\{28/11;3\}$

7). $4x^4-17x^2+4=0$ $\{-1/2;-2;1/2;2\}$

8). $2x^3+16=0$ $\{-2;1+\sqrt{3}j;\ 1-\sqrt{3}j\}$

9). $1/x^2+2x-1/(x+1)^2=1/2$ $\{0;-1;-2\}$

10). $x(x-2)(x-3)(x-5)=72$ $\{2;3;5-\sqrt{73}/2;\ 5+\sqrt{73}/2\}$