



Agzamxo'djayeva M.SH

Mavzu: Irratsional tenglama,
tengsizliklarni yechish.



1. Irratsional tenglamalar. Agar $A(x) = B(x)$ tenglamadagi $A(x)$ yoki $B(x)$ ifodalardan hech bo'lmaganda bittasi irratsional bo'lsa, u holda bu tenglama *irratsional tenglama* deyiladi. Ularni yechishda teng kuchli almashtirishlardan foydalaniladi.

Teorema . Agar n soni musbat va toq bo'lsa, u holda $A(x) = B(x)$ va $A^n(x) = B^n(x)$ tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Agar n soni musbat va juft bo'lsa, $A^n(x) = B^n(x)$ tenglamaning ildizi $A(x) = B(x)$ va $A(x) = -B(x)$ tenglamalardan hech bo'lmaganda bittasini qanoatlantiradi.



TIAME

1- misol. $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x - 2$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$ tenglama yagona $x = \frac{3}{7}$ ildizga ega.

Lekin u $x - 2 \geq 0$ tengsizligini qanoatlantirmaydi. Tenglama yechimga ega emas.

2- misol. $\sqrt{-3x^2 + 3x - 2} = \sqrt{-2x - 10}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$$-3x^2 + 3x - 2 = -2x - 10, \quad -2x - 10 \geq 0.$$

$-3x^2 + 3x - 2 = -2x - 10$ tenglamaning ildizlari -1 va $2\frac{2}{3}$.

Lekin bu qiymatlarda $-2x - 10 \geq 0$ tengsizligi bajarilmaydi. Demak, berilgan tenglama ildizga ega emas.



TIAME

3- misol. $x^2 - 3x - 11 + \sqrt{x^2 - 3x - 9} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = \sqrt{x^2 - 3x - 9}$ almashtirish tenglamani $y^2 - 2 + y = 0$ ko'rinishga keltiradi. Uning ildizlari $y_1 = -2$, $y_2 = 1$ sonlari bo'lgani uchun, eski o'zgaruvchiga qaytish natijasida yechimga ega bo'lmagan $\sqrt{x^2 - 3x - 9} = -2$ tenglamaga hamda $x_1 = -2$,

$x_2 = 5$ ildizlarga ega bo'lgan $\sqrt{x^2 - 3x - 9} = 1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Demak, berilgan tenglama $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ ildizlarga ega.

4- misol. $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = |x - 4|$ va $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $|x - 4| + |x - 2| = 2$ ko'rinishga keladi. Modul qatnashgan bu tenglama barcha $x \in [2; 4]$ lardagina to'g'ri tenglikka aylanadi.



2. Irratsional tengsizliklar. a va b sonlari nomanfiy bo'lganagina $a < b$ dan $a^n < b^n$ kelib chiqadi (va aksincha, $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$). Shunga ko'ra $A(x)$, $B(x)$ irratsional ifodali tengsizliklarni yechishda ularning ishoralari e'tiborga olinishi kerak. Umuman,

$${}^{2k}\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0, \\ A(x) < B^{2k}(x) \end{cases} \quad (1)$$

bo'ladi. Sistemadagi birinchi tengsizlik ildiz ostidagi ifodaning nomanfiyligini, ikkinchisi $B(x)$ ning musbatligini ifodalaydi, uchinchisi $a \geq 0$, $b \geq 0$ da $a < b$ va $a^{2k} < b^{2k}$ tengsizliklar bir vaqtda bajarilishidan kelib chiqadi. ${}^{2k}\sqrt{A(x)} > B(x)$ tengsizligi $B(x) \geq 0$, $A(x) > B^{2k}(x)$ bo'lganda yoki $A(x) \geq 0$, $B(x) < 0$ bo'lganda o'rinli. Shunga ko'ra ${}^{2k}\sqrt{A(x)} > B(x)$ tengsizlikni yechish uchun

$$\begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \quad (2) \quad \text{va} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

tengsizliklar sistemalarini yechish va ularning yechimlarini birlashtirish kerak.



TIAME

1- misol. $\sqrt{x^2 + 6x - 16} > x - 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikdan ushbu tengsizliklar sistemalari hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x^2 + 6x - 16 > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x^2 + 6x - 16 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases}$$

Birinchi sistemaning yechimi $\left(2\frac{1}{8}; +\infty\right)$ to'plamdan, ikkinchi sistemaniki $(-\infty; -8)$ to'plamdan iborat.

$$\text{Javob: } (-\infty; -8) \cup \left(2\frac{1}{8}; +\infty\right).$$

Agar irratsional tengsizlik

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < C(x) \quad (4)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ va $\sqrt{B(x)} < C(x)$ (yoki $\sqrt{A(x)} < C(x)$) shartlar bajarilganda berilgan tengsizlik $A(x) < (C(x) - \sqrt{B(x)})^2$ (yoki $B(x) < (C(x) - \sqrt{A(x)})^2$) tengsizlikka teng kuchli bo'lib, yuqorida qaralgan turlardan biriga keladi.



TIAME

2- misol. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} < 5$ tengsizlikni yeching.
Yechish.

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+4 \geq 0, \\ \sqrt{x-1} < 5, \\ x+4 < (5-\sqrt{x-1})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -4, \\ x < 26, \\ x < 5. \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 5,$$

Javob: $1 \leq x < 5$.

3-misol. $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6$ tenglamani yeching.

△ Berilgan tenglama $(x-3)(\sqrt{x^2-5x+4}-2) = 0$ shaklga keltiriladi.

$\begin{cases} x = 3, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo'lmaganligi uchun $\sqrt{x^2-5x+4} = 2$

tenglamani qarash yetarli. Bu tenglamaning ikkala qismini kvadratga ko'tarsak, unga teng kuchli bo'lgan $x^2-5x+4=4$ tenglamani hosil qilamiz.

Javob: 0 va 5. ▲

4-misol. $\sqrt[3]{x^2+8x-8} = \sqrt[3]{2x-1}$ tenglamani yeching.

△ $\sqrt[3]{x^2+8x-8} = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^2+8x-8 = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -7. \end{cases}$

Javob: 1 va -7. ▲