Agzamxo'djayeva M.SH

Mavzu:Funksiyaning xossalari.
Juft-toqligi, monotonlifi, nollari,
chegaranganligi.

1. Juft va toq funksiyalar. Agar X to‘plamning har qanday x elementi uchun $-x \in X$ bo‘lsa, X to‘plam $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik to‘plam deyiladi. Masalan, $(-\infty; +\infty)$, $[-2; 2]$, $(-3; 3)$, $(-8; -2) \cup [2; 8)$ to‘plamlarning har biri $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik to‘plamdir. $(-3; 2)$ to‘plam esa $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lmagan to‘plamdir.

Aniqlanish sohasi $O(0;\ 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan to‘plamda $y = f(x)$ funksiya uchun $\forall x \in B(f)$ larda $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya *juft funksiya*, $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilganda esa *toq funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x) = 2x^2 + 3$ – juft funksiya, chunki $f(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = f(x)$. Shuningdek, $y = |x|$, $y = x^4$ lar ham juft funksiyalardir. $(-x)^5 = -x^5$, demak, $y = x^5$ – toq funksiya. Umuman, x^{2n}, $n \in N$, funksiyalar juft, x^{2n-1}, $n \in N$, funksiyalar toq funksiyalardir. Ta’riflarga qaraganda toq funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan, juft funksiya grafigi esa ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik joylashadi. Juft va toq funksiya aniqlanish sohasi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi.

Funksiyalarni juft-toqlikka tekshirishda quyidagicha:

a) $f(x)$ funksiya $D(f)$ da, $g(x)$ funksiya $D(g)$ da aniqlangan bo‘lsin. Agar umumiy $x \in D(f) \cap D(g)$ aniqlanish sohasida $f(x)$ va $g(x)$ funksiya bir vaqtda juft (yoki toq) bo‘lsa, ularning $(f+g)(x)$ yig‘indisi ham juft (toq) bo‘ladi.

Haqiqatan, $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$; $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$;

b) ikkita juft (toq) funksiya ko‘paytmasi juft funksiya, toq va juft funksiyalar ko‘paytmasi esa toq funksiya bo‘ladi.

Haqiqatan, f va g funksiyalar juft bo‘lsa, $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$. Qolgan hollar ham shu kabi isbotlanadi.

2-misol. $f(x) = a,\ a \in R$ doimiy funksiya juft funksiyadir. Chunki $y = a$ funksiya grafigi Ox o'qiga parallel va Oy o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan to'g'ri chiziqdan iborat. Shunga ko'ra, agar f funksiya juft (toq) bo'lsa, af funksiya ham juft (toq) funksiya bo'ladi. Agar f va g funksiyalar juft (toq) bo'lsa, $af + bg$ funksiya ham juft (toq) funksiya bo'ladi.

3-misol. $x^6 - 2x^2 + 6$ — juft funksiya, chunki x^6, $2x^2$ va 6 lar juft, $x^5 - 2x$ — toq funksiya, chunki x^5 va $2x$ — toq; $(x-2)^2$ na toq, na juft, chunki uning yoyilmasi bir turli bo'lmagan (ya'ni juft va toq) finksiyalar yig'indisi $x^2 - 4x + 4$ dan iborat. Keyingi xulosani yana quyidagicha ham isbotlash mumkin:

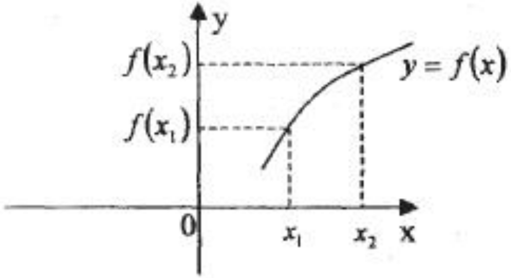
$$(-x-2)^2 = (x+2)^2 \neq (x-2)^2.$$

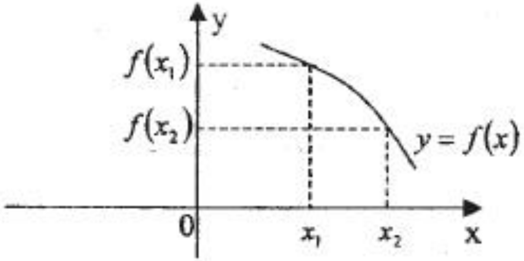
4-misol. $\frac{x^2-4}{x^6-2x^4+7}$ funksiya $f = x^2 - 4$ va $g = \frac{1}{x^6-2x^4+7}$ juft funksiyalarning ko'paytmasi sifatida juft funksiyadir.

Funksiyaning monotonligi

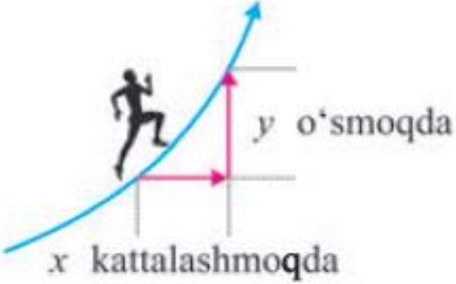
Agar $x_1<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x_1, x_2 \in I$ uchun $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, I oraliqda $y=f(x)$ funksiya *o‘suvchi* deyiladi.

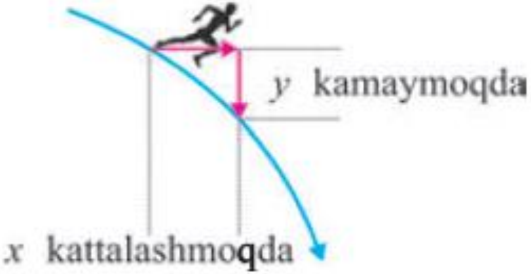
Agar $x_1<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x_1, x_2 \in I$ uchun $f(x_2)<f(x_1)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, I oraliqda $y=f(x)$ funksiya *kamayuvchi* deyiladi.



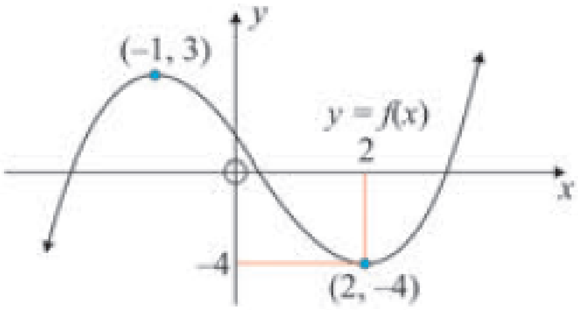


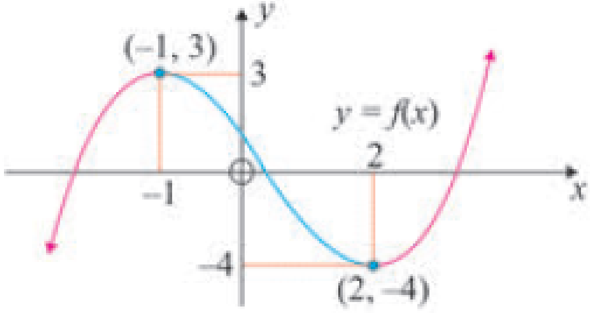
Agar funksiya o‘suvchi bo‘lsa, grafik bo‘ylab chapdan o‘ngga “harakat” qilsak, ordinatalar ortadi; funksiya kamayuvchi bo‘lsa, ordinatalar kamayadi.





1- misol. Funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping:





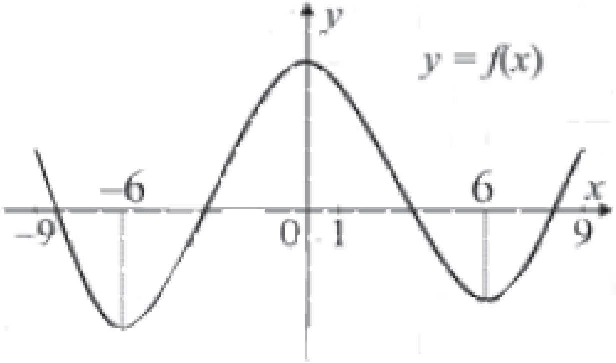
△ Agar funksiya o‘suvchi bo‘lsa, grafik bo‘ylab chapdan o‘ngga harakat qilsak, ordinatalar o‘sadi (grafikda qizil rangda ajratilgan). Demak, funksiya $x \leqslant -1$ va $x \geqslant 2$ oraliqlarda o‘sadi. Javobni $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ ko‘rinishda ham yozsa bo‘ladi.

Xuddi shunday, agar funksiya kamayuvchi bo‘lsa, grafik bo‘ylab chapdan o‘ngga harakat qilsak, ordinatalar kamayadi (grafikda ko‘k rangda ajratilgan). Demak, funksiya $-1 \leqslant x \leqslant 2$ oraliqlarda kamayadi. ▲

2- misol. Funksiya qaysi oraliqlarda o'sadi?

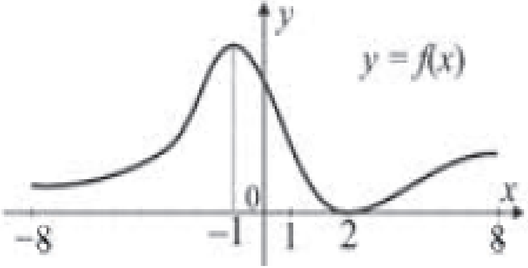
△ Bu funksiya [−9; 9] oraliqda berilgan.

Agar funksiya o'suvchi bo'lsa, grafik bo'ylab chapdan o'ngga harakat qilsak, ordinatalar kattalashadi. Demak, funksiya [−6;0] va [6;9] oraliqlarda o'sadi. Javobni [−6;0]∪[6;9] ko'rinishda ham yozsa bo'ladi. ▲



3- misol. Funksiya qaysi oraliqlarda kamayadi?

△ Agar funksiya kamayuvchi bo'lsa, grafik bo'ylab chapdan o'ngga harakat qilsak, ordinatalar kichiklashadi. Demak, funksiya [−1; 2] oraliqda kamayadi. ▲



Agar shunday M haqiqiy soni mavjud bo‘lib, barcha $x \in X$ sonlari uchun $f(x) \geq M$ (mos ravishda $f(x) \leq M$) tengsizlik bajarilsa,
f funksiya X to‘plamda *quyidan chegaralangan* (*yuqoridan chegaralangan*) deyiladi. Agar funksiya X to‘plamda ham quyidan,
ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u shu to‘plamda *chegaralangan*
deyiladi.

4-misol. $y = -x^2$ funksiyani qaraymiz. Barcha $x \in (-\infty;+\infty)$ sonlari uchun $-x^2 \leq 0$ bo‘lgani uchun bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda yuqoridan chegaralangandir.

5-misol. $y = x^2$ funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda quyidan chegaralangan
funksiyadir, chunki barcha $x \in (-\infty; +\infty)$ sonlari uchun
$y(x) = x^2 \geq 0$ tengsizlik bajariladi.

6-misol. $y = x$ funksiya $(0; 1)$ oraliqda quyidan 0 soni bilan, yuqoridan esa 1 soni bilan chegaralangan ekanini ko‘rish qiyin emas. Demak, bu funksiya $(0; 1)$ oraliqda chegaralangandir.

Agar ixtiyoriy M haqiqiy soni uchun, shunday bir $x \in X$ son topilib, $f(x) < M$ $(f(x) > M)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda quyidan (mos ravishda, yuqoridan) chegaralanmagan deyiladi.

Agar f funksiya X to‘plamda yo quyidan, yo yuqoridan, yoki har ikki tomondan chegaralanmagan bo‘lsa, bu funksiya X to‘plamda chegaralanmagan funksiya deyiladi.