Agzamxo’djayeva M.SH

Mavzu:Ko`rsatkichli funksiyalar xossalari va grafigi. Ko`rsatkichli tenglama.

Daraja va uning xossalari

Haqiqiy son ko'rsatkichli daraja quyidagi xossalarga ega ($a>0,\ a\neq 1$):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$;

4) $(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) agar $0<a<b$ va $x>0$ bo'lsa, $a^x<b^x$; 7) agar $0<a<b$ va $x<0$ bo'lsa, $a^x>b^x$;

8) agar $x<y$ va $a>1$ bo'lsa, $a^x<a^y$; 9) agar $x<y$ va $0<a<1$ bo'lsa, $a^x>a^y$

bo'ladi.

1- misol. Taqqoslang: $2^{-\sqrt{3}}$ va $3^{-\sqrt{3}}$.

△ 7- xossaga ko'ra $0<2<3$ va $-\sqrt{3}<0$ bo'lgani uchun $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

2- misol. Taqqoslang: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ va $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

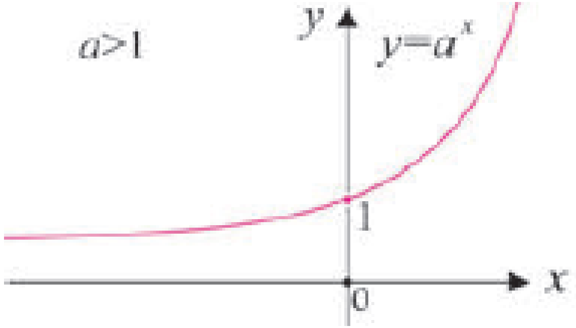
△ 9- xossaga ko'ra $0,2<0,3$ va $0<\frac{1}{2}<1$ bo'lgani uchun $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

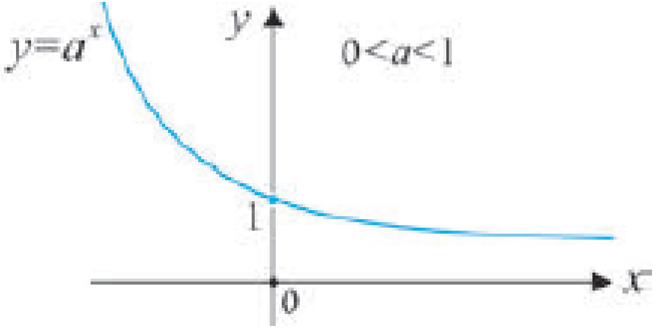
Ko'rsatkichli funksiya va uning xossalari

$f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ ko'rinishdagi funksiya *ko'rsatkichli funksiya* deyiladi. Bunday funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) aniqlanish sohasi $(-\infty;\ +\infty)$ oraliqdan iborat;
2) qiymatlar sohasi $(0;\ +\infty)$ oraliqdan iborat;
3) barcha $a(a>0,\ a\neq1)$ uchun $a^0=1$;
4) $a>1$ bo'lsa, funksiya o'suvchi;
5) $0<a<1$ bo'lsa, funksiya kamayuvchidir.

Quyidagi rasmlarda $f(x)=a^x$ funksiyaning grafiklari keltirilgan.





Ko‘rsatkichli funksiya va uning xossalari. $a > 0$, $a \neq 1$ bo‘lsin. $f(x) = a^x$ tenglik bilan aniqlangan funksiya a asosli *ko‘rsatkichli funksiya* deyiladi. Bu funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan, $D(f) = R$, chunki $a > 0$ bo‘lganda a^x daraja barcha

$x \in R$

uchun ma’noga ega. x ning istalgan haqiqiy qiymatida $a^x > 0$

bo‘lgani

uchun va ixtiyoriy $b > 0$ sonda $a^x = b$ bo‘ladigan birgina $x \in R$ soni mavjud bo‘lgani uchun $E(f) = R_+$ bo‘ladi.

Xossalari:

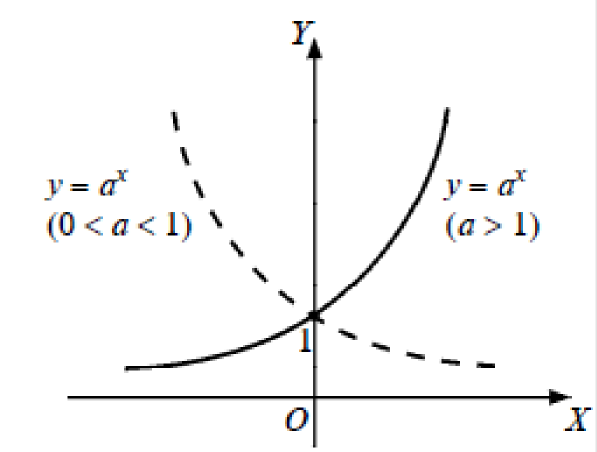
1) $a > 1$ bo‘lsa, $f(x) = a^x$ funksiya R da o‘sadi. $0 < a < 1$ bo‘lsa, $f(x) = a^x$ funksiya R da kamayadi.

Isbot. $a > 1$ holni qarash bilan cheklanamiz. $a > 1$ va $\alpha < \beta$ bo‘lsin, bu yerda α, β sonlari ixtiyoriy haqiqiy sonlar. U holda

$\beta - \alpha > 0$, $a > 1$ bo‘lgani uchun $a^{\beta - \alpha} > a^0$ yoki $a^{\beta - \alpha} > 1$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bundan, $a^{\beta - \alpha} \times a^{\alpha} > 1 \times a^{\alpha}$ yoki $a^{\beta} > a^{\alpha}$

hosil bo‘ladi. Demak, $\alpha < \beta$ dan $a^{\alpha} < a^{\beta}$ ekani kelib chiqadi. Bu esa a^x funksiya o‘suvchi ekanligini bildiradi.



Ko'rsatkichli tenglamalar. $a^x = b \quad (a, b \in R)$

tenglama *eng sodda ko'rsatkichli* tenglamadir, bu yerda $a > 0$, $a \neq 1$.

Ko'rsatkichli funksiyaning qiymatlar to'plami $(0; +\infty)$ oraliqdan iborat bo'lgani uchun $b \leq 0$ bo'lganda qaralayotgan tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Agar $b > 0$ bo'lsa, tenglama yagona yechimga ega va bu yechim $x = \log_a b$ sonidan iborat bo'ladi

Teorema. ***Agar a > 0, a ≠ 1 bo'lsa,***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{1}$$

va

$$f(x) = g(x) \tag{2}$$

tenglamalar teng kuchlidir.

Isbot. Agar a soni (2) tenglamaning ildizi bo'lsa, $f(a) = g(a)$ bo'ladi. U holda, $a^{f(a)} = a^{g(a)}$. Aksincha, a (1) tenglamaning ildizi bo'lsa, $a^{f(a)} = a^{g(a)}$ va a^x funksiyaning monotonligidan $f(a) = g(a)$ bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

1-misol. $8^{5x^2-46} = 8^{2(x^2+1)}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama (1) ko‘rinishda berilgan. Unga teng kuchli (2) ko‘rinishga o‘tamiz: $5x^2 - 46 = 2(x^2 + 1)$, bundan $x = -4$, $x = 4$ aniqlanadi.

Agar tenglama

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \tag{3}$$

(bu yerda $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 0$) ko‘rinishda bo‘lsa, $b^{g(x)} = a^{\log_a(b^{g(x)})} = a^{g(x)\log_a b}$ ekanidan foydalanib, tenglamani

$$a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bundan unga teng kuchli $f(x) = g(x)\log_a b$ tenglamaga o‘tiladi.

2-misol. $5^{3x-1}=3x$ tenglamani yechamiz.

Yechish. $5^{3x-1} = 5^{x\log_5 3} \Rightarrow 3x-1 = x\log_5 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3-\log_5 3}$.

Agar tenglama $f(a^x) = 0$ ko'rinishda bo'lsa, $a^x = t$ almashtirish orqali $f(t)=0$ tenglamaga o'tiladi. Har vaqt $a^x>0$ bo'lgani uchun $f(t)=0$ tenglamaning musbat ildizlarigina olinadi, so'ng $a^x=t$ bog'lanish yordamida berilgan tenglama ildizlari topiladi.

3-misol. $4^x+2^x-6=0$ tenglamani yechamiz.

Yechish. $2^x=t$ almashtirish $(2^x)^2+2^x-6=0$ tenglamani $t^2+t-6=0$ kvadrat tenglamaga keltiradi. Uning yechimlari $t=-3$, $t=2$. Musbat yechim bo'yicha $2^x=2$ ni tuzamiz. Bundan $x=1$.