



8-урок: ГЕОМЕТРИЯ

(лекционная занятие)

1 курс

ТЕМА: Вписанные и описанные треугольники.
Замечательные точки треугольника.
Вписанные и описанные четырехугольники.



Вписанные многоугольники

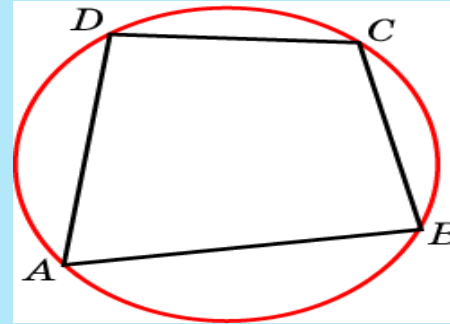
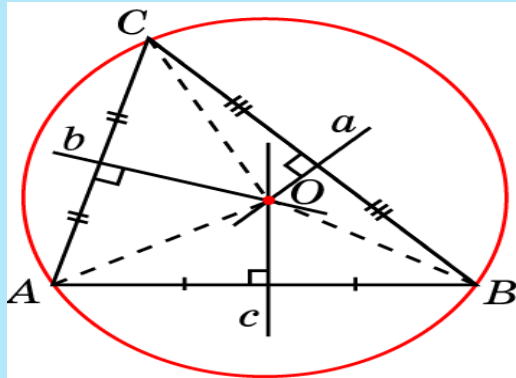


ТИАМЕ

Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется описанной около многоугольника.

Теорема 1. Около всякого треугольника можно описать окружность.

Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Теорема 2. Суммы противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равны 180° .



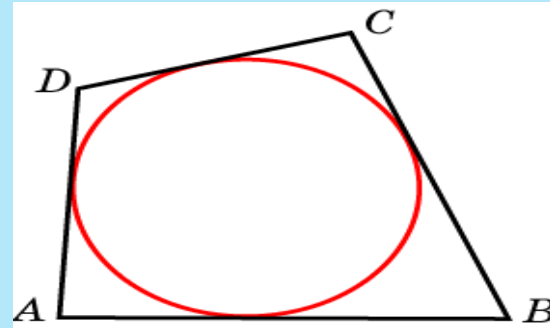
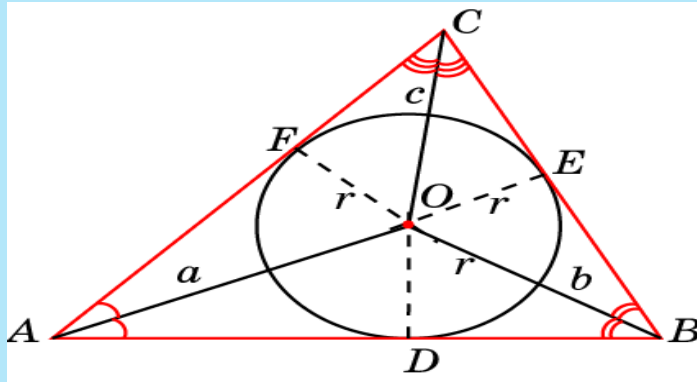
Описанные многоугольники



ТИАМЕ

Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется вписанной в многоугольник

Теорема 3. В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.



Теорема 4. Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.



Вписанные и описанные треугольники

Теорема 5. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Теорема 6. Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника, выражается формулой $R = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c – стороны треугольника S – его площадь.

Теорема 7. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника S – его площадь.

Вписанная и описанная окружность около треугольника.

Треугольник. Вписанная окружность.

- 1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
- 2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
- 3) $r = \frac{S}{p}$, p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности

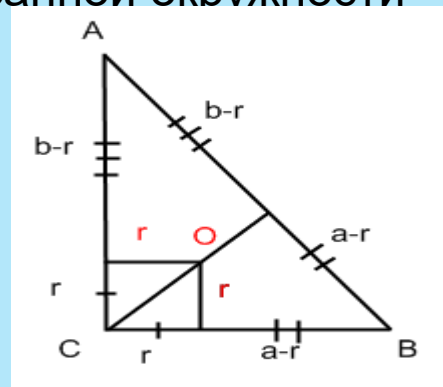
В правильном треугольнике

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

C – гипотенуза

$$C = p - r$$

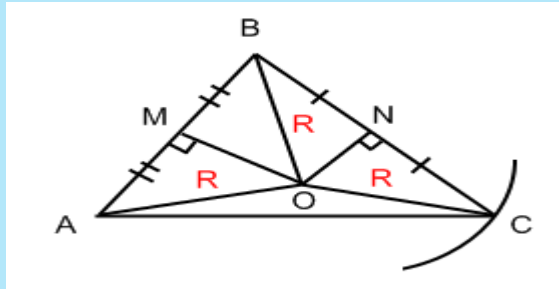
p – полупериметр



$$r = \frac{a+b+c}{2}$$

Треугольник. Описанная окружность.

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

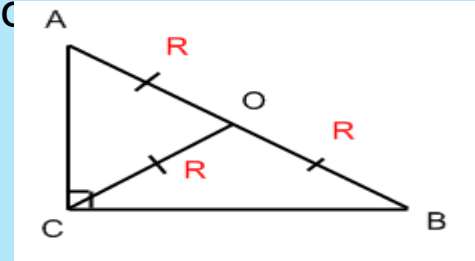


$$\angle AOB = 2\angle C$$

- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

- 3) Центр окружности, описанной около Прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы

$$R = \frac{1}{2} AB$$





ТІАМЕ

Треугольник. Описанная окружность

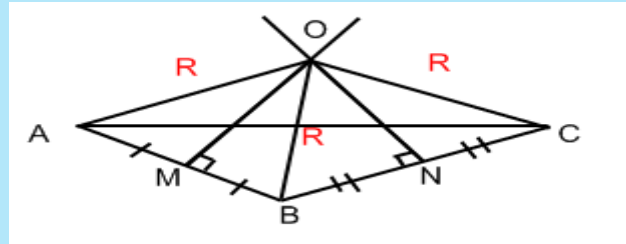
4) R – радиус описанной окружности
 $R=OA=OB=OC$ в любом треугольнике.

5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ - Для правильного треугольника

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$





TIAME

**Замечательные точки треугольника —
точки, местоположение которых
не зависит от того, в каком порядке
берутся стороны треугольника.**

В школьном курсе геометрии изучаются 4 замечательные точки треугольника: точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения высот.

Кроме этого существует *девять* особых точек: *середины сторон, основания высот, середины отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) с вершинами треугольника.*



Примеры точек.



Замечательными точками треугольника являются точки пересечения:

Медиан — центроид

Высот — ортоцентр

Биссектрис — инцентр (центр вписанной окружности)

Серединных перпендикуляров — центр описанной окружности.



Медиана треугольника.



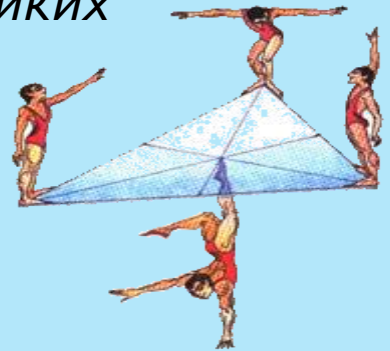
• **Точка пересечения медиан является его центром масс или центром тяжести треугольника, или барицентром.**

• Точкой пересечения медианы делятся на две части в отношении 2:1, считая от вершины.

• Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

• Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана.

• Из векторов, образующих медианы, можно составить треугольник.



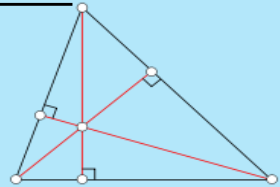


Высота треугольника.



TIAME

- Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.
- *В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.*
- *В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.*
- Основания высот образуют так называемый
- ортотреугольник, обладающий собственными свойствами.





Биссектриса треугольника.



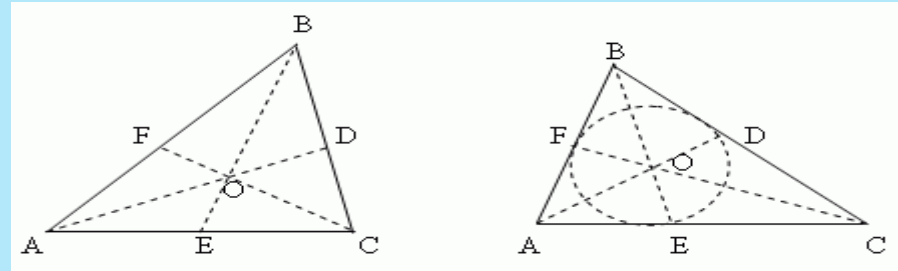
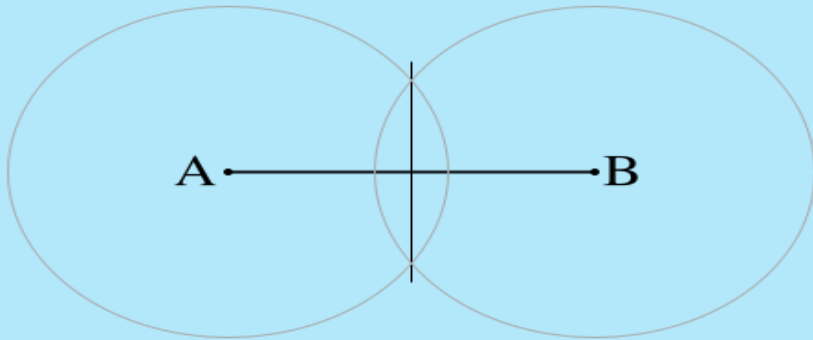
- ***Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — инцентре — центре вписанной в этот треугольник окружности.***
- Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка — центр одной из трёх вневписанных окружностей этого треугольника.
- Основания биссектрис двух внутренних и одного внешнего углов треугольника лежат на одной прямой, если биссектриса внешнего угла не параллельна противоположной стороне треугольника.
- Если биссектрисы внешних углов треугольника не параллельны противоположным сторонам, то их основания лежат на одной прямой.



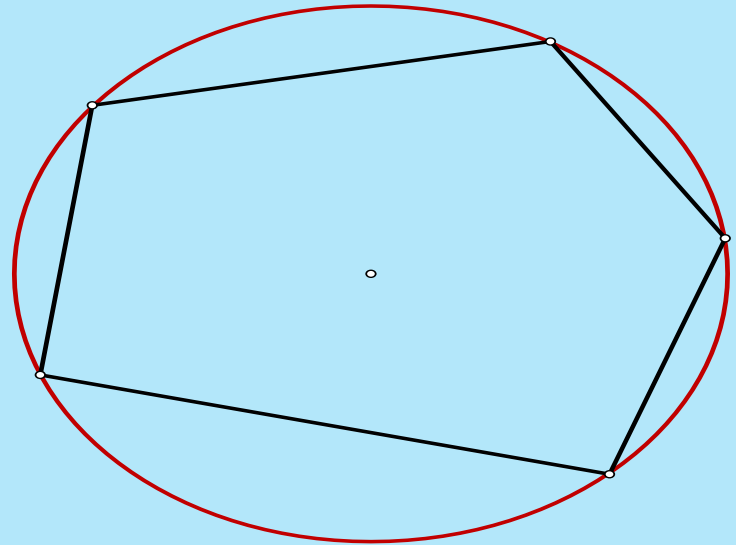
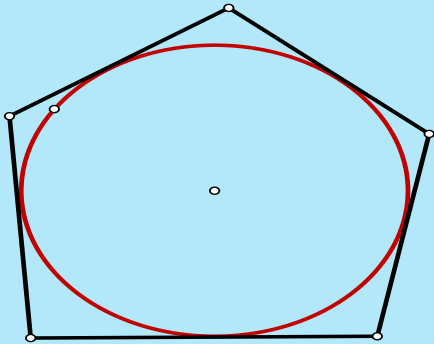
Серединный перпендикуляр треугольника.



- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника или другого описываемого окружностью многоугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.



Вписанная и описанная окружности





Свойство четырехугольника описанного около окружности



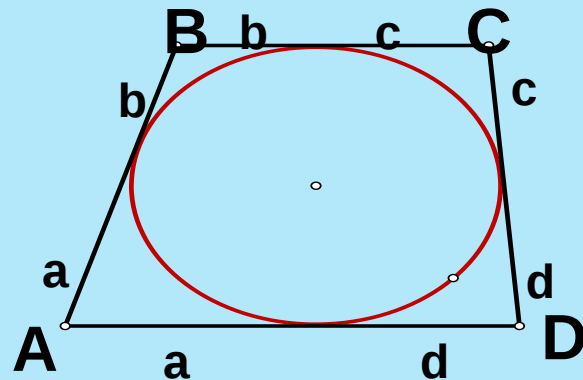
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

$$AB + CD = BC + AD$$

Доказательство.

$$AB + CD = a + b + c + d, \quad BC + AD = a + b + c + d,$$

Поэтому $AB + CD = BC + AD$.



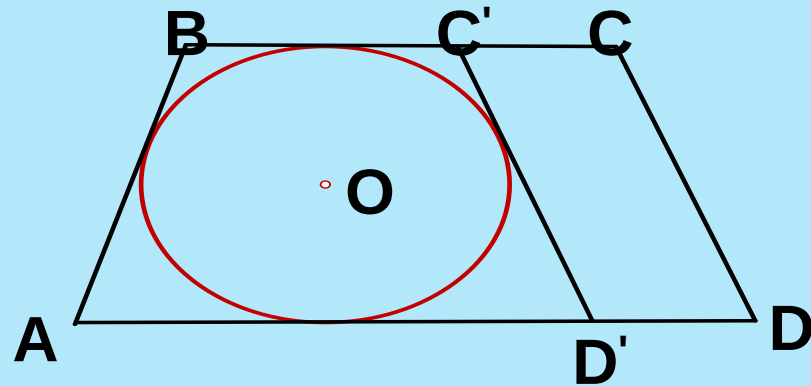
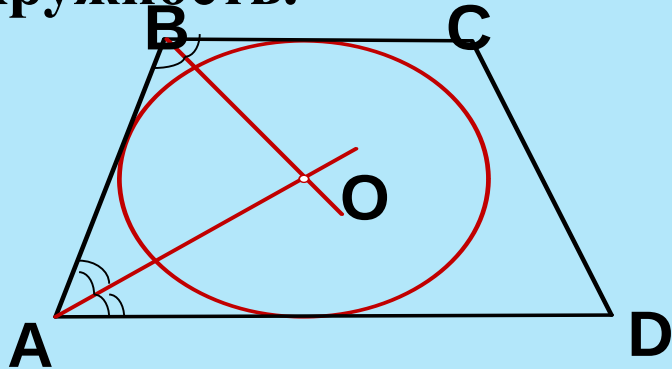


Обратное утверждение



TIAME

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

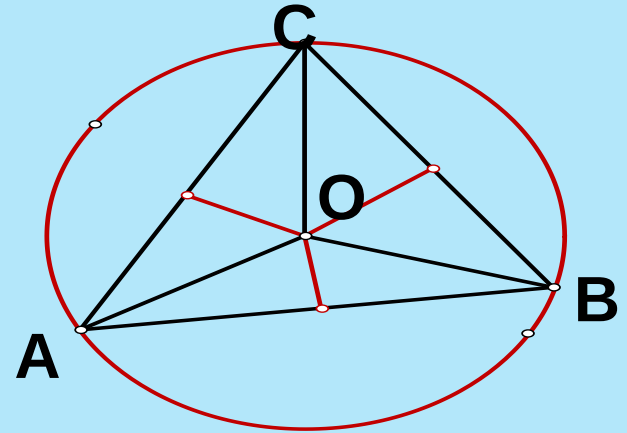
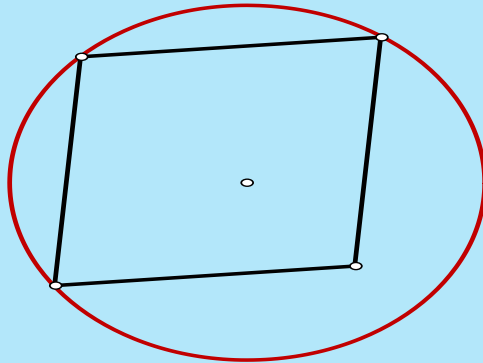




Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

В отличие от треугольника
около четырехугольника не
всегда можно описать
окружность.





Свойство четырехугольника вписанного в окружность



**В любом вписанном четырехугольнике суммы
противоположных углов равна 180° .**

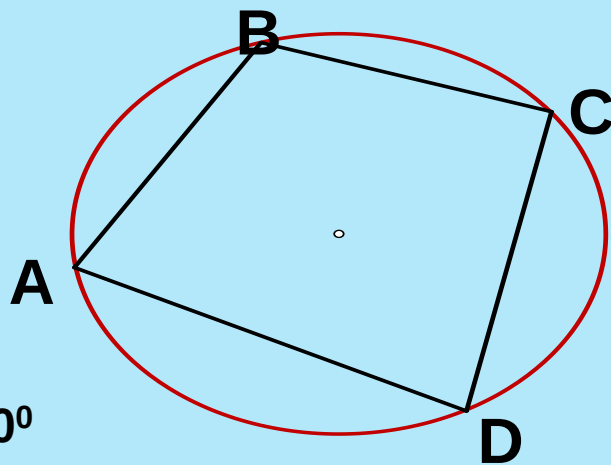
$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Доказательство.

По теореме о вписанном угле имеем

**$\angle A = \frac{1}{2} \circ BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \circ BAD$, откуда
следует**

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\circ BCD + \circ BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

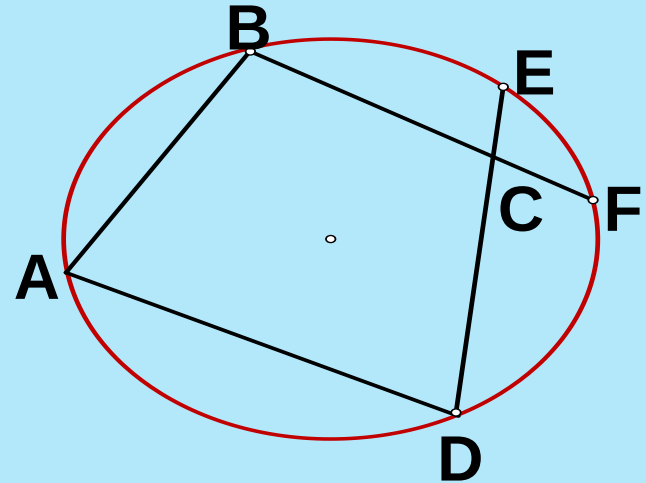
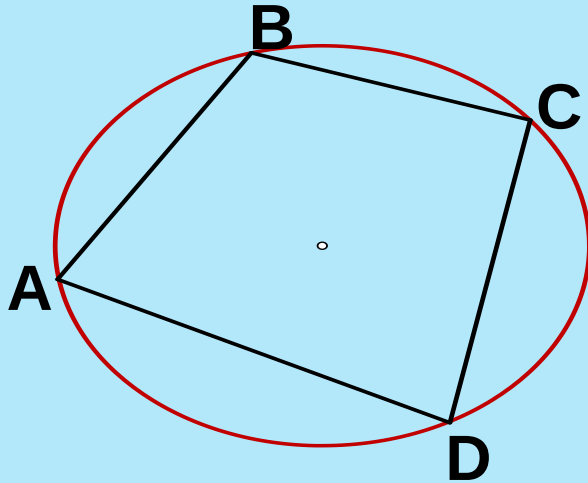




Обратное утверждение



Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.





TIAME

Вопросы для повторения:

1. Что называется вписанной окружностью?
2. Что является центром вписанной окружности?
3. В любой ли треугольник можно вписать окружность?