



ТИАМЕ

# 9-урок: ГЕОМЕТРИЯ

(практическая занятие)

## 1 курс

**ТЕМА:**

Вписанные и описанные треугольники.

Замечательные точки треугольника.

Вписанные и описанные четырехугольники.

# Вписанная и описанная окружность около треугольника.

Треугольник. Вписанная окружность.

- 1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
- 2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
- 3)  $r = \frac{S_{\Delta}}{p}$ ,  $p$  – полупериметр треугольника,  $r$  – радиус вписанной окружности

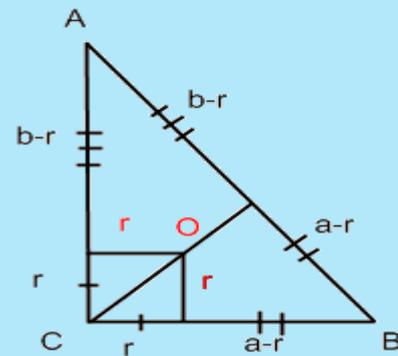
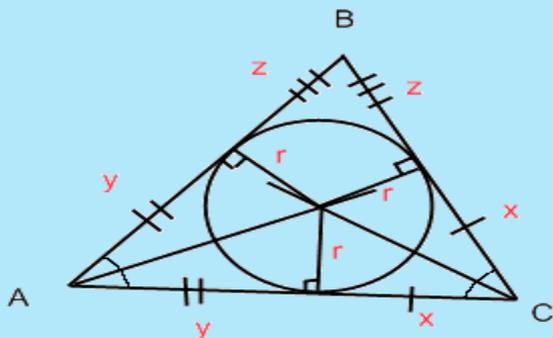
**В правильном треугольнике**

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

**$C$  – гипотенуза**

$$C = p - r$$

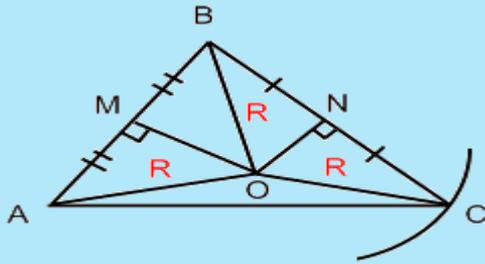
$p$  - полупериметр



$$r = \frac{a+b+c}{2}$$

## Треугольник. Описанная окружность.

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

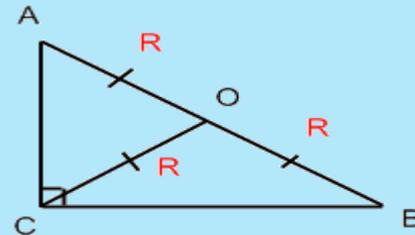


$$\angle AOB = 2\angle C$$

- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

- 3) Центр окружности, описанной около Прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2} AB$$



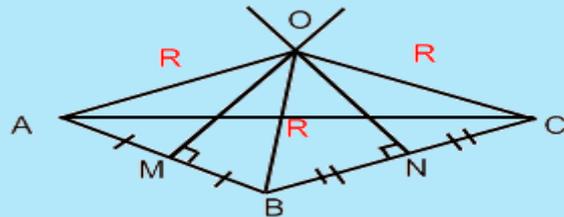
## Треугольник. Описанная окружность

- 4)  $R$  – радиус описанной окружности  
 $R=OA=OB=OC$  в любом треугольнике.
- 5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{- Для правильного треугольника}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$



# Задачи!

Основание равнобедренного треугольника равно 36 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках А и Р,  $AP=12$  см. Найти: периметр треугольника.

Решение:  $O$  – центр вписанной окружности.  $CH$  – высота, биссектриса и медиана, т.к. равнобедренный  $\triangle BCF$ .  $HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$ .  $AP \parallel BF$  т.к.

$AB=PF$ . Значит  $\triangle ACP \sim \triangle ACF$ .  $\triangle ACP$  – равнобедренный.

$$k = \frac{AP}{BF} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

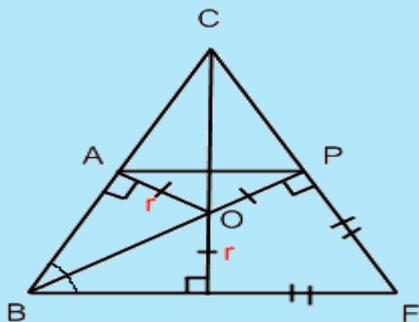
Т.к.  $O$  – центр описанной окружности, то

$$HF=PF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18. \quad \frac{CP}{CF} = \frac{AP}{HF} = \frac{1}{3}, \text{ тогда } \frac{CP}{CP+18} = \frac{1}{3},$$

$$3CP = CP + 18, \text{ значит } CP = 9. \quad CF = 9 + 18 = 27.$$

$$P_{BCF} = 2CF + BF = 2 \cdot 27 + 36 = 54 + 36 = 90.$$

Ответ. 90





## Задача 2

Расстояние, от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной окружности в треугольник, равно  $2\sqrt{2}$ .  $S_{\Delta}=30$ . Найти: длину гипотенузы.

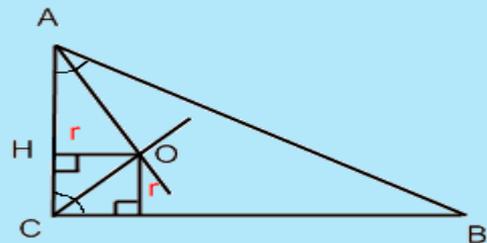
Решение:  $P$  – полупериметр.

$O$  – точка пересечения биссектрис.

$$\angle HCO = 45^{\circ}, \quad OH = r, \quad CO = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Тогда } r = CO \sin 45^{\circ} = 2. \quad P = \frac{S_{\Delta}}{r} = 15$$

$$C = P - r = 13.$$



Ответ. 13

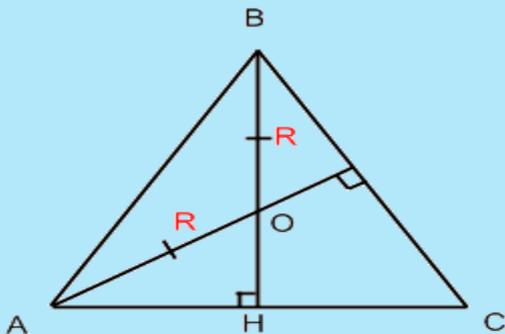
## Задача 3

В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение:  $BH=AC=4$ .  $R$  – радиус описанной окружности.  $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$ ,  $HC = \frac{1}{2}AC = 2$ ,

$$BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad AB = BC = 2\sqrt{5}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \quad R = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4}{4 \cdot 8} = 2,5$$



Ответ. 2,5



# Задача 4!



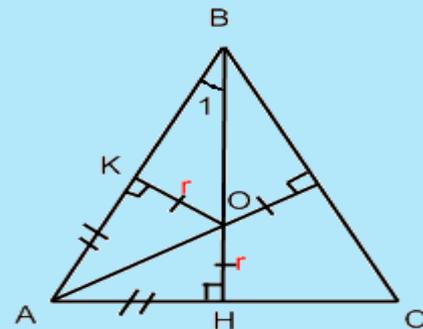
В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 10, а радиус вписанной окружности равен 4. Найти диаметр, описанной около этого треугольника, окружности.

Решение:  $O$  – центр вписанной окружности, точка пересечения биссектрис.  
 $r = OH = OK = 4$ .  $BH = 10$ ,  $BO = BH - OH = 10 - 4 = 6$ .  $D$  – диаметр описанной окружности,  $D = 2K$ .  $\triangle KBO$  – прямоугольный:  $KO = 4$ ,  $BO = 6$ .

$$\sin \angle 1 = \frac{KO}{BO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \cos \angle 1 = \sqrt{1 - \sin^2 \angle 1} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$
$$\operatorname{tg} \angle 1 = \frac{\sin \angle 1}{\cos \angle 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad \operatorname{tg} \angle 1 = \frac{AH}{BH}, \quad AH = BH \cdot \operatorname{tg} \angle 1 = 4\sqrt{5}$$

$$AC = 2AH = 8\sqrt{5}, \quad \angle B = 2\angle 1, \quad \sin \angle B = \sin 2\angle 1 = 2 \sin \angle 1 \cdot \cos \angle 1 = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$D = 2R = \frac{AC}{\sin \angle B} = 8\sqrt{5} : \frac{4\sqrt{5}}{9} = 18$$



Ответ. 18



## Задачи для самостоятельного решения.

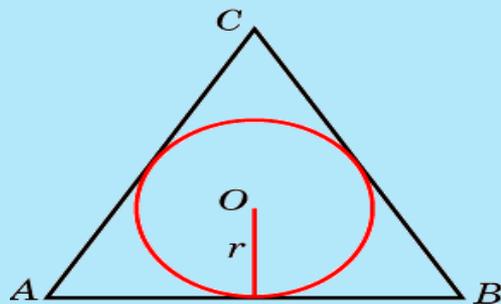


- 1) Около  $\triangle ABC$  описана окружность с центром в точке  $O$ .  $CH$  – высота. Найти  $\angle OCH$ , если  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ . Ответ.  $10^\circ$
- 2) Около равнобедренного треугольника описана окружность,  $R = 7\sqrt{2}$ . Её диаметр пересекает сторону  $BC$  в точке  $E$ . Найти диаметр окружности описанной около  $\triangle ACE$ .  
Ответ. 14
- 3) Остроугольный равнобедренный треугольник вписан в окружность с центром  $O$  и радиусом 10. Найти  $\angle BOC$ .  
Ответ. 40
- 4) Точка касания окружности, вписанной в треугольник, делит катет на отрезки 3 и 5. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.  
Ответ. 8,5



TIAME

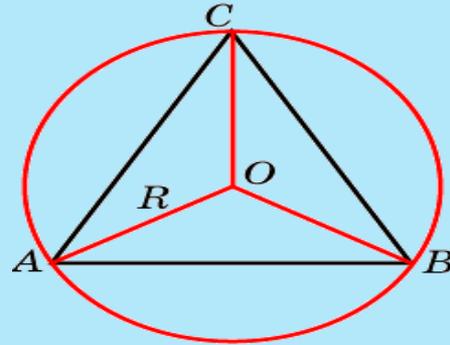
5. Сторона равностороннего треугольника равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Ответ: 1.



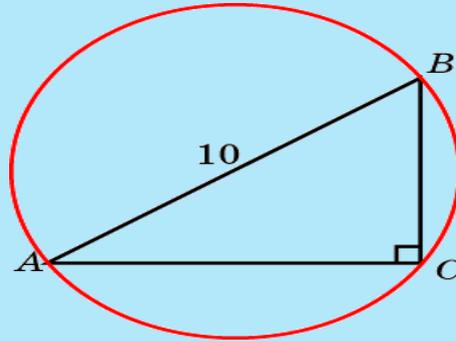
6. Сторона равностороннего треугольника равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 2.

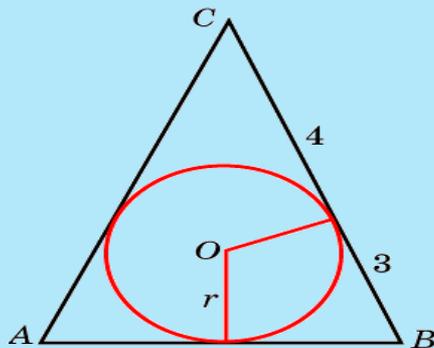


7. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5.

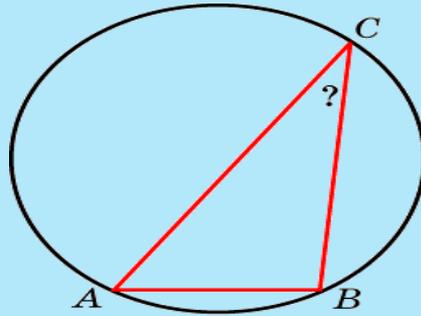
8. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 4 и 3, считая от вершины. Найдите периметр треугольника.



Ответ: 20.



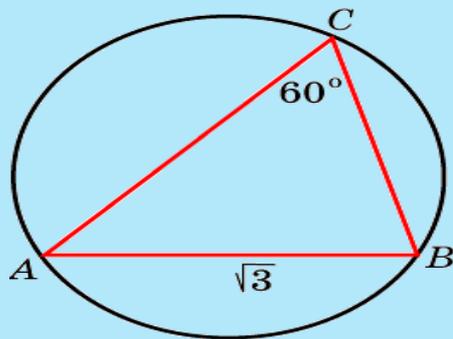
9. Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне.



Ответ:  $30^\circ$ .



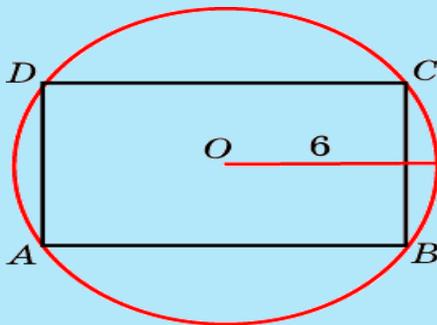
10. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  равна  $\sqrt{3}$ , угол  $C$  равен  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



Ответ: 1.



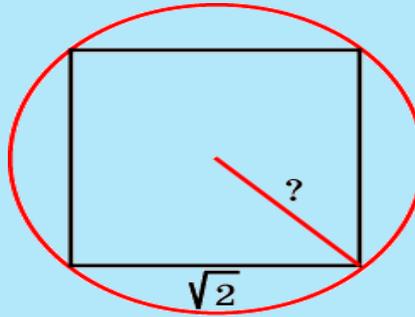
11. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 6.



Ответ: 12.



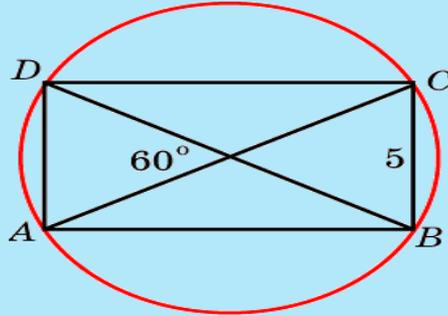
12. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной, равной  $\sqrt{2}$ .



Ответ: 1.



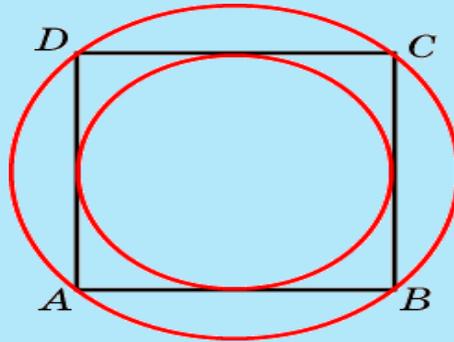
13. Меньшая сторона прямоугольника равна 5 см. Угол между диагоналями равен  $60^\circ$ . Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5.



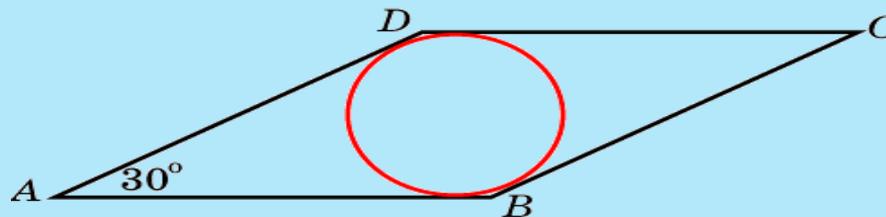
14. Около окружности радиуса, равного  $\sqrt{3}$ , описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанного около этого квадрата.



Ответ: 2.

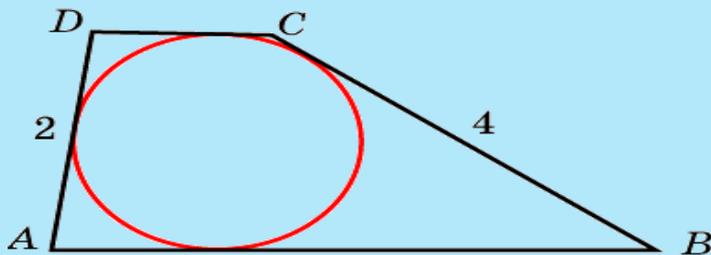


15. Сторона ромба равна 4, острый угол –  $30^\circ$ . Найдите радиус вписанной окружности.



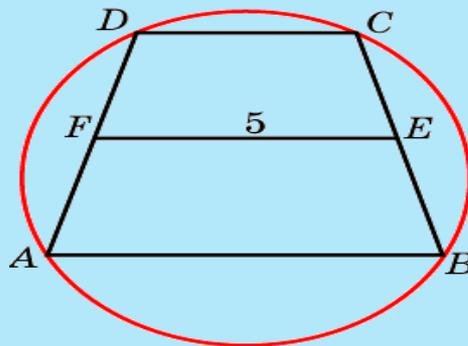
Ответ: 1.

16. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 2 и 4. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ: 3.

17. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 20, средняя линия 5 см. Найдите боковую сторону трапеции.



Ответ: 5.