15-урок: ГЕОМЕТРИЯ

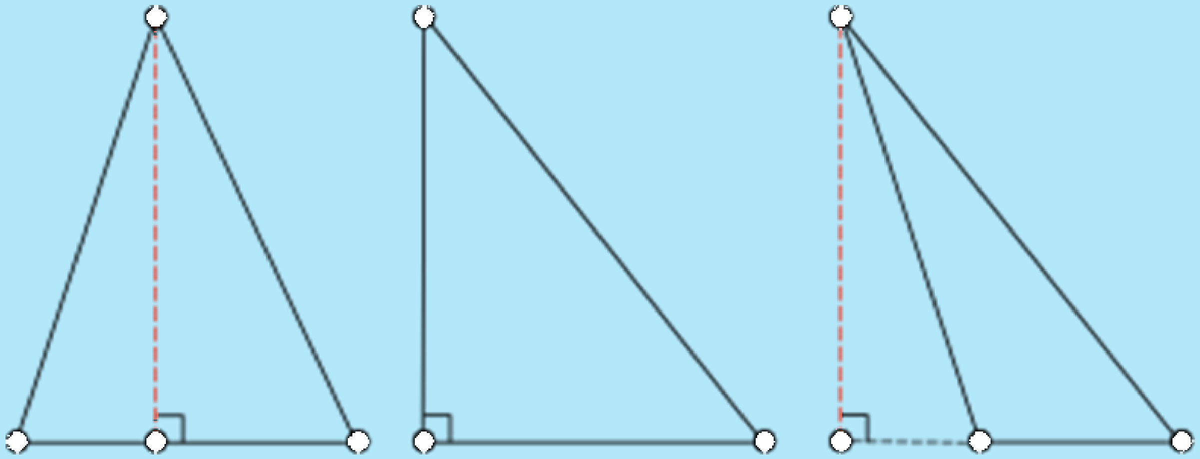
(Лекционное занятие)

1 курс

ТЕМА: **Теорема о высотах треугольника и ее применение. Площадь криволинейных фигур. Вписанные окружности в сегмент. Понятие о радикальной оси.**

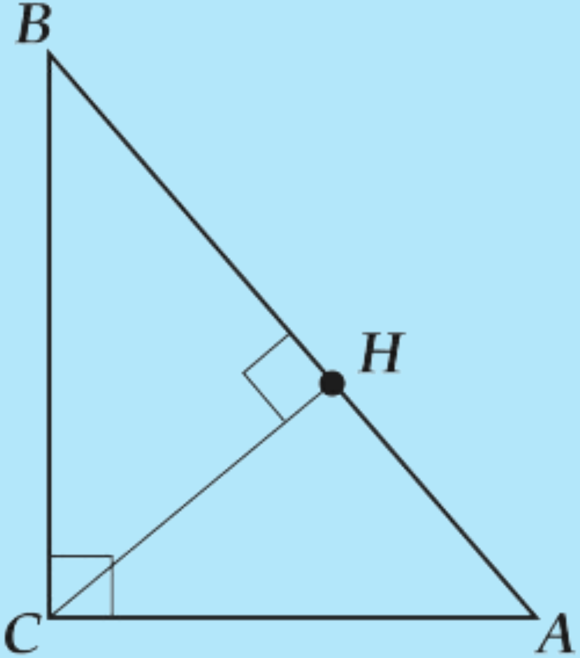
Определение

- Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



Свойства высоты

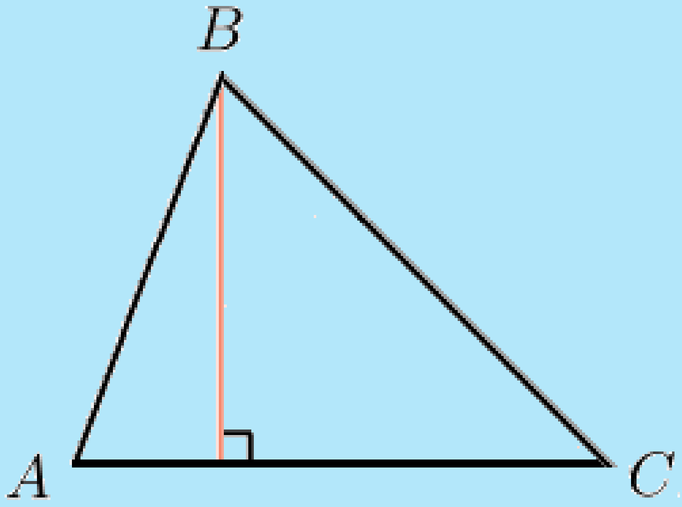
В *прямоугольном треугольнике* высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобныеис ходному.



$$\frac{AC}{BA}=$$

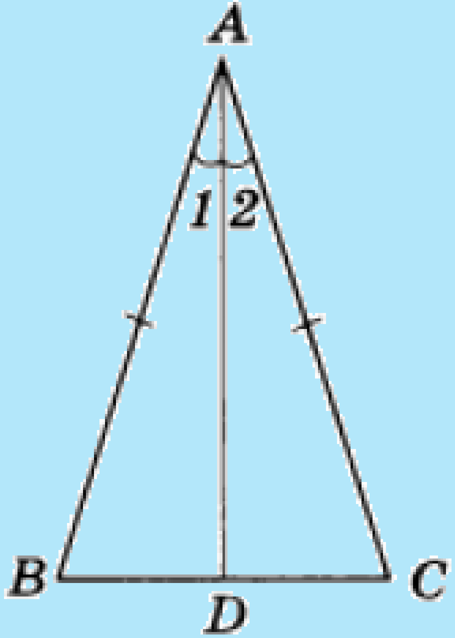
Свойства высоты

В *остроугольном треугольнике* две его высоты отсекают от него подобные треугольники.



Свойства высоты

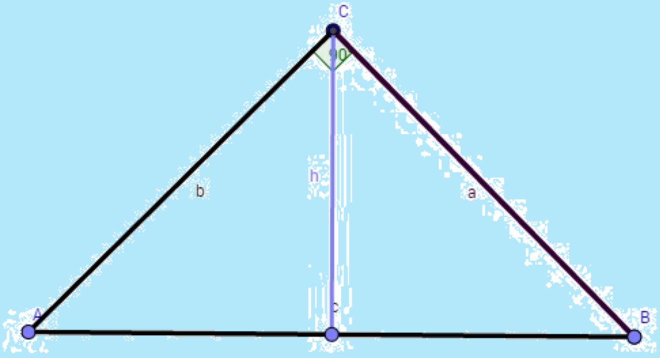
- В *равнобедренном* треугольнике, третья высота одновременно является медианой и биссектрисой того угла, из которого она выходит.



Теорема о высоте прямоугольного треугольника

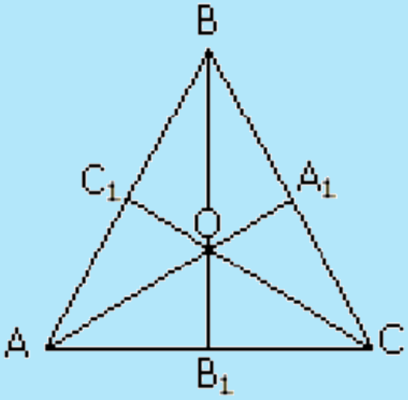
- Если высота в прямоугольном треугольнике АВС длиной **h**, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу длиной **С** на отрезки **m** и **n**, соответствующие катетам **b** и **a**, то верны следующие равенства:

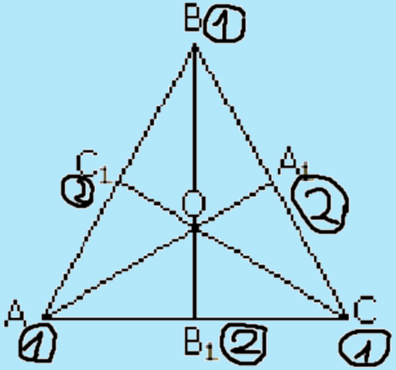
- $h^2 = n \cdot m$
- $a^2 = c \cdot n$; $b^2 = c \cdot m$
- $h \cdot c = a \cdot b$



Медианы и высоты в равностороннем треугольнике

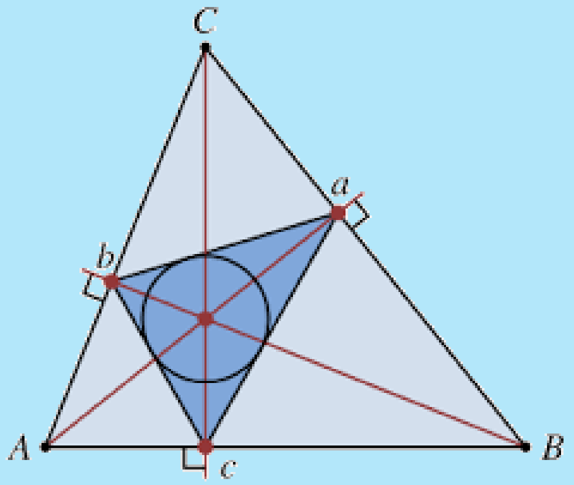
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется *центром тяжести* треугольника. А в равносторонних треугольниках медианы и высоты - одно и то же.



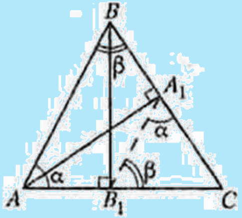


Ортотреугольник

- Три высоты треугольника пере-секаются в одной точке, эта точка носит название ортоцентра.
- Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника.
- Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.



Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному:



$\Delta ABC \rightarrow \angle B_1A_1C = a; \angle A_1B_1C = b$

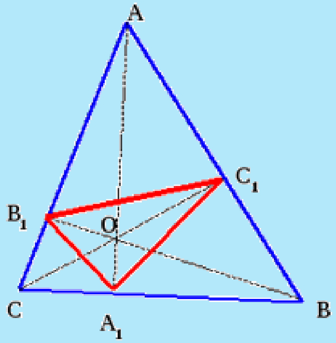
$\left.\begin{array}{l} \angle C\text{-ОБЩИЙ} \\ \angle AA_1C = \angle BB_1C \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C \longrightarrow A_1C/AC = B_1C/BC$

$\longrightarrow \Delta A_1CB_1 \sim \Delta ACB \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1 = a \\ \angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1 = b \end{array}\right.$

$\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle BA_1C_1 = \angle BAC = a \\ \angle BC_1A = \angle C \end{array}\right.$

$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle AC_1B_1 = \angle C \\ \angle AB_1C_1 = \angle ABC = b \end{array}\right.$

Теорема о свойстве биссектрис ортотреугольника



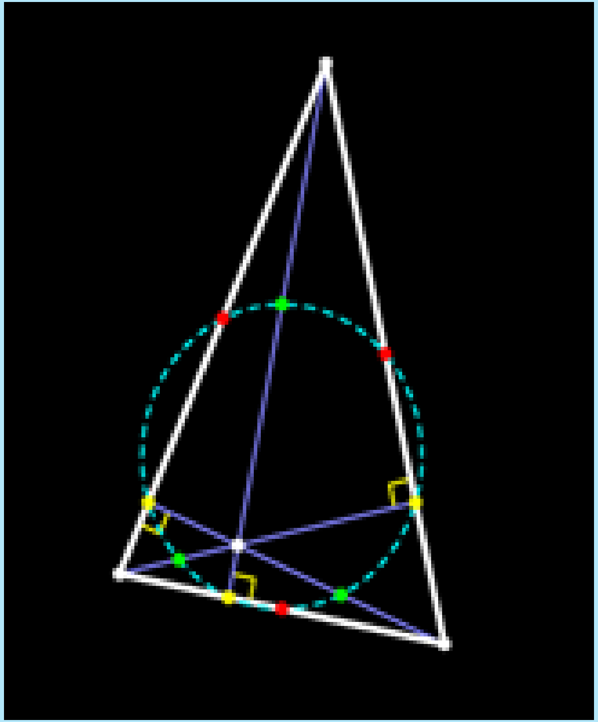
$\llcorner B_1C_1C = \llcorner B_1BC = \llcorner CAA_1 = \llcorner CC_1A$

$\downarrow$

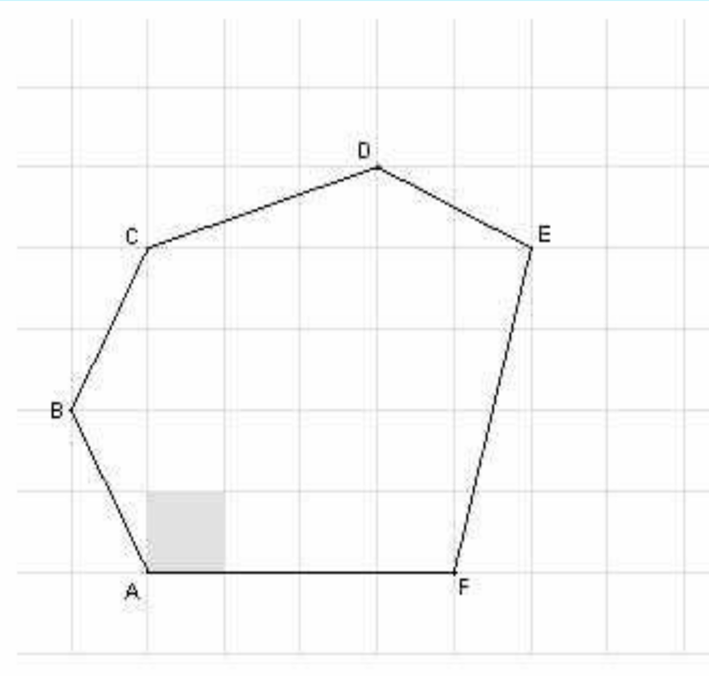
CC_1-биссектриса $\llcorner B_1C_1A$
AA_1-биссектриса $\llcorner B_1A_1C_1$
BB_1-биссектриса $\llcorner A_1B_1C_1$

Окружность девяти точек

- Основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр — точку пересечения высот —с вершинами треугольника, лежат на одной окружности — окружности девяти точек.



Площадь многоугольника



Площадь многоугольника – это величина той части площади, которую занимает многоугольник.

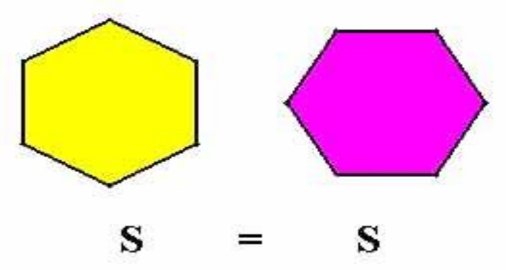
Площадь многоугольника – выражается положительным числом

Площадь многоугольника показывает сколько раз единица измерения или её части укладываются в данном многоугольнике.

Площадь многоугольника – положительная величина, обладающая свойствами

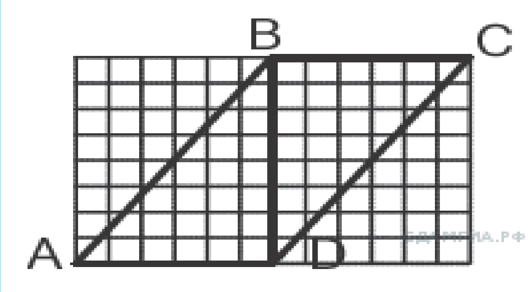
Свойство1.

Равные многоугольники имеют равные площади



Задача

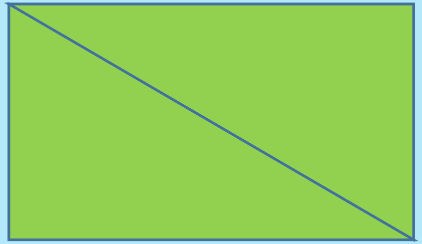
Площадь параллелограмма ABCD – 30 $см^2$. Чему равна площадь треугольника ABD?

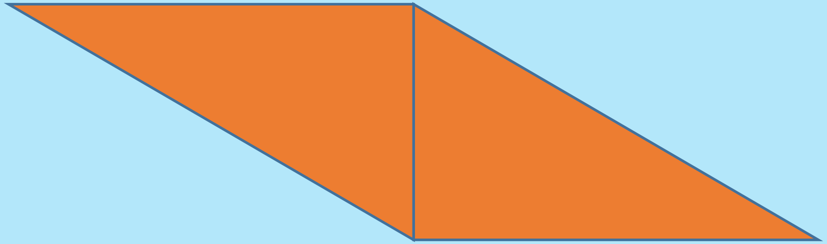


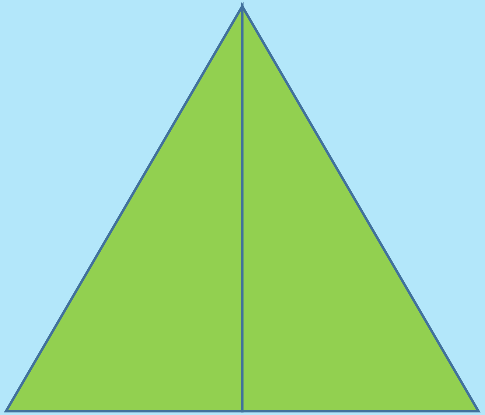
Многоугольники, имеющие равные площади называются равновеликими.

Свойство 2.

Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.



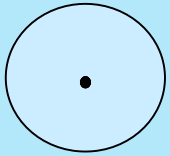




$$S_1=S_2+S_3$$

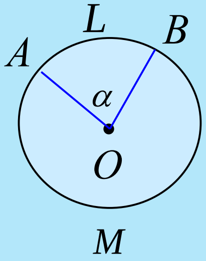
Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из него составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называют равносоставленными.

Площадь круга и площадь кругового сегмента



$$\boxed{S = \pi R^2}$$

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

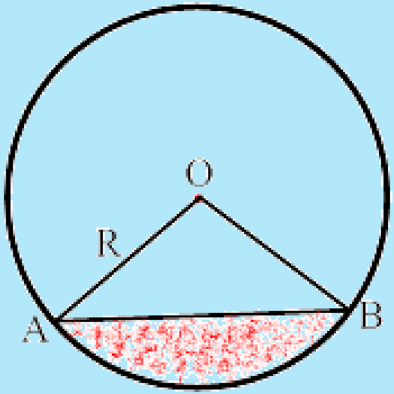


$$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha}$$

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

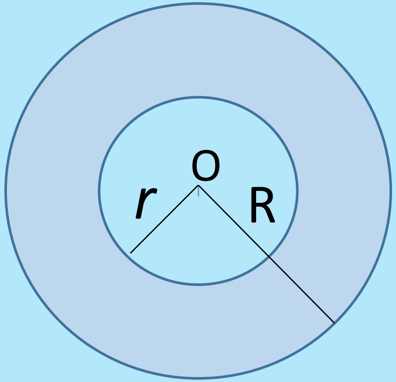
Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**.

Круговым сегментом, или просто **сегментом,** называется часть круга отсекаемая от него какой-нибудь хордой.



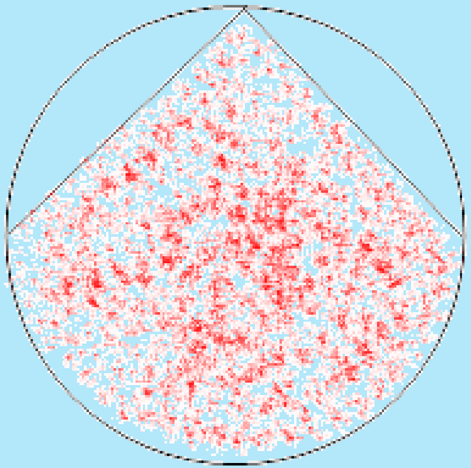
$$S_{сегмента} = S_{сектора} - S_{AOB} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360^0} - \frac{1}{2} R^2 \sin\varphi$$

Выведите формулу нахождения площади кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями с радиусами *r* и R, где R > *r.*



$$S_{кольца} = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

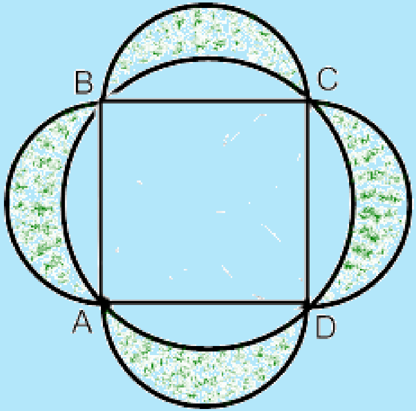
Из точки, принадлежащей кругу, радиус которого равен r, проведены две равные и перпендикулярные хорды. Найдите площадь части круга, заключенной между этими хордами.



$$S=\frac{\pi r^2}{2}+\frac{1}{2}\left(r\sqrt{2}\right)^2=$$

$$\frac{\pi r^2}{2}+\frac{2r^2}{2}=\frac{r^2}{2}(\pi+2)$$

На рисунке заштрихованная фигура состоит из четырех так называемых луночек Гиппократа. Докажите, что ее площадь равна площади квадрата ABCD.



Всю фигуру можно представить состоящей из квадрата ABCD и четырех полукругов, построенных на каждой его стороне, как на диаметре. Приняв сторону квадрата за ***a*,** получим площадь этой фигуры:

$$S = a^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$$

Теперь от площади этой фигуры отнимем площадь круга, описанного около квадрата

$$S_{ф} = \left(a^2 + \frac{\pi a^2}{2}\right) - \frac{\pi a^2}{2} = a^2$$