



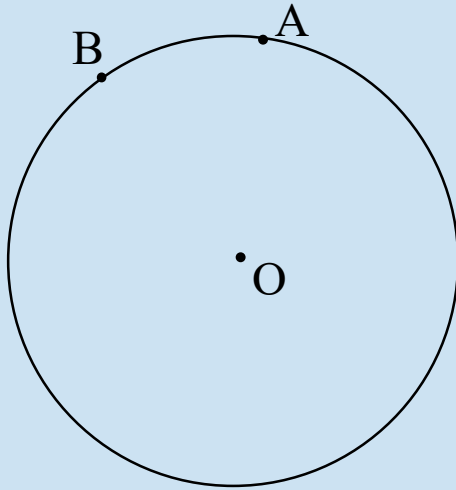
ГЕОМЕТРИЯ

(лекционная занятие)

ТЕМА: Окружность и круг. Центральные углы и их измерения. Соотношения между дугами и хордами. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности и ее свойства.



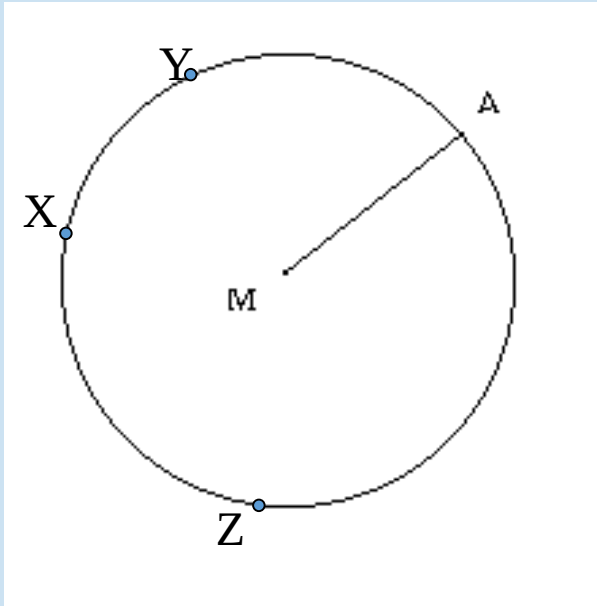
Окружность.



Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки — центра окружности.

Круг - часть плоскости, ограничена окружностью.

Радиус.



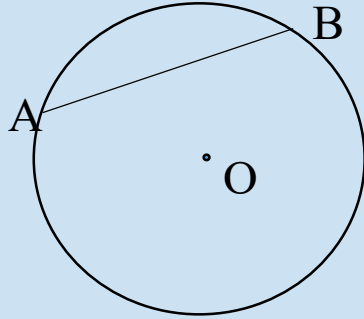
Радиусом называется отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности.

Точки X, Y, Z лежат на окружности с центром M . Является ли радиусом этой окружности

- Отрезок MX ;
- Отрезок YZ ?

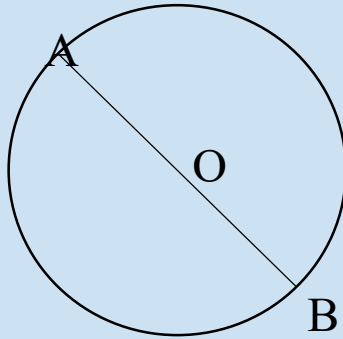


Хорда.



Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр.



Диаметром называется хорда, проходящая через центр.

Отрезок соединяющий центр окружности с какой-либо точкой на окружности – *радиус*.

Радиус окружности.

Центр окружности.

Отрезок соединяющий две точки окружности – *хорда*.

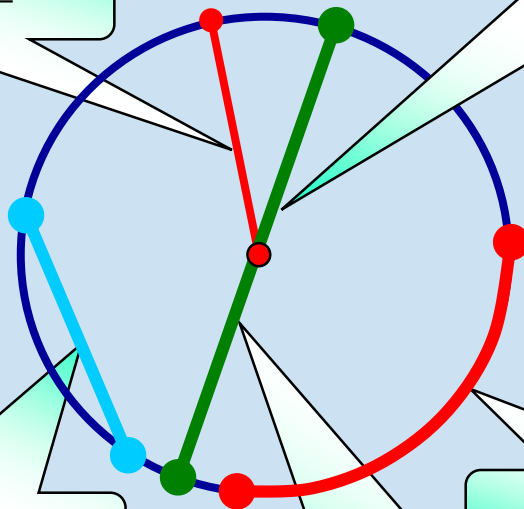
Хорда окружности.

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется *дугой*

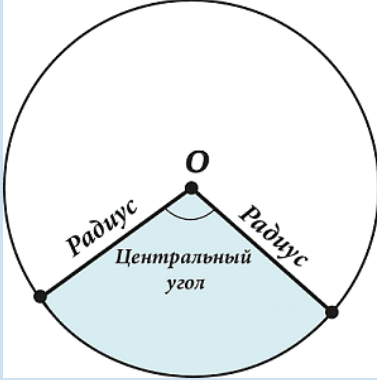
Дуга окружности.

Диаметр окружности.

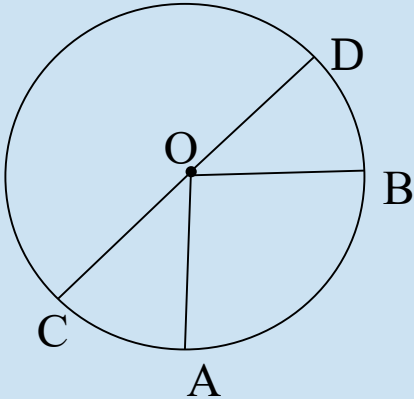
Хорда, проходящая через центр окружности – *диаметр*.



Центральный угол



- Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.
- Градусная мера центрального угла соответствует градусной мере дуги, на которую он опирается (если дуга меньше полуокружности).
- Если центральные углы данной окружности равны, то соответствующие им дуги попарно равны.



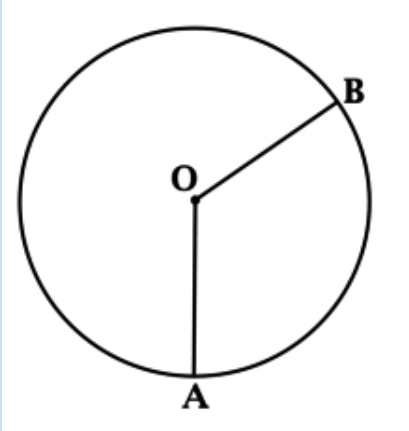


Задача



TIAME

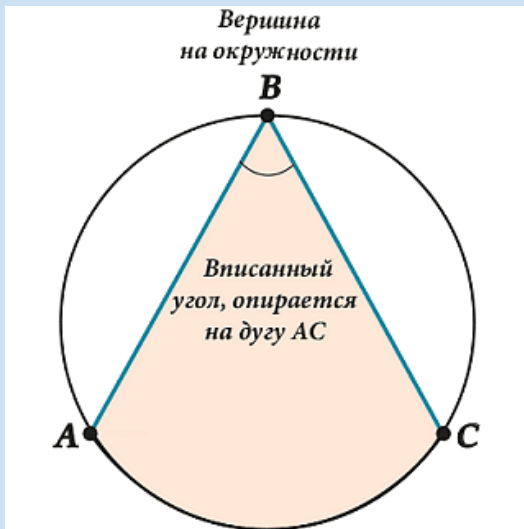
Длина окружности с центром в точке O равна 12. $\angle AOB = 120^\circ$, точки A и B лежат на окружности и разбивают её на две дуги. Во сколько раз длина большей из получившихся дуг превосходит длину меньшей?



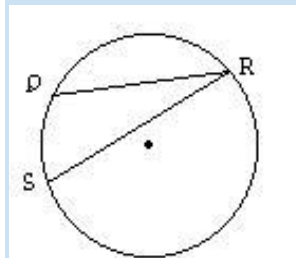
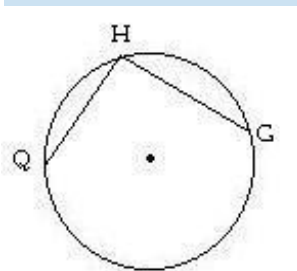
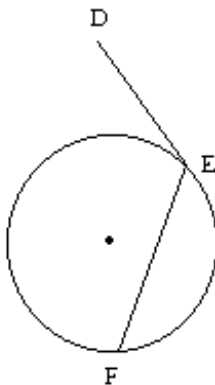
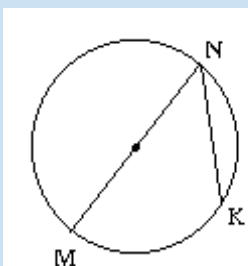
Длины дуг относятся так же, как их градусные меры. Так как O – центр окружности, то $\angle AOB$ – центральный. Градусная мера дуги, меньшей, чем полуокружность, есть градусная мера центрального угла, который на неё опирается. Тогда градусная мера меньшей из дуг равна 120° , а большей из дуг 240° . Градусная мера большей дуги в $240:120=2$ раза больше, чем градусная мера меньшей дуги.

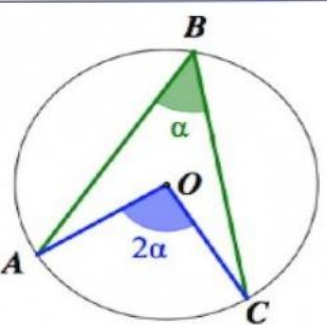
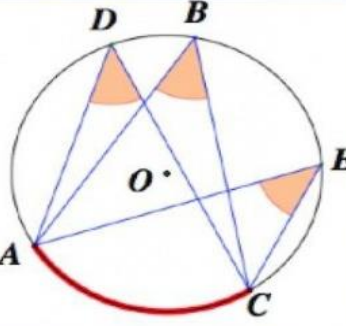
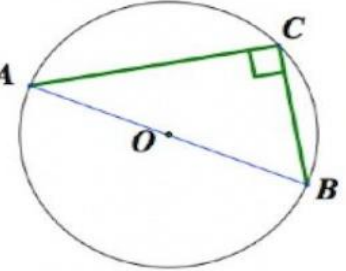
Ответ: 2

Вписанный угол.

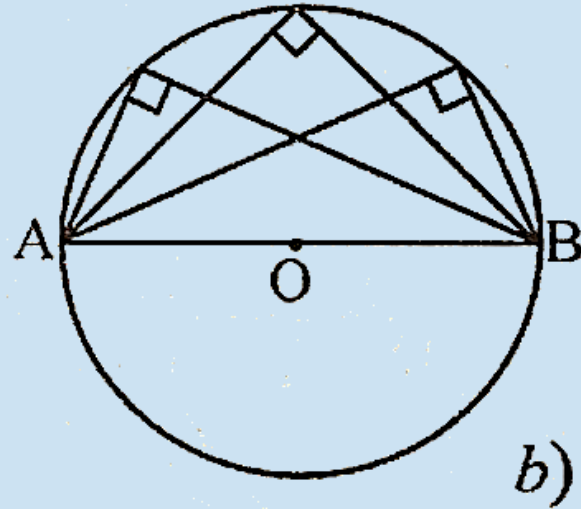
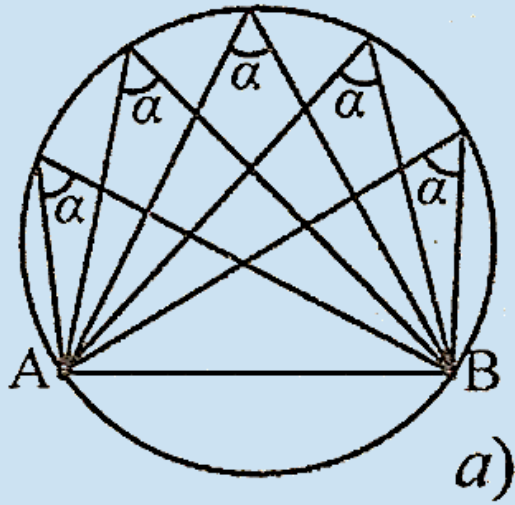


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **ВПИСАННЫМ** в окружность.



	Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу. <i>И т.к. центральный угол измеряется градусной мерой дуги, на которую опирается, то вписанный угол равен половине этой дуги</i>
	Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны
	Угол, опирающийся на диаметр, - прямой.

Вписанные углы, проходящие через точки окружности A и B , вершины которых лежат по одну сторону прямой AB взаимно равны (a) В частности, если AB диаметр, то вписанные углы равны 90° (b)



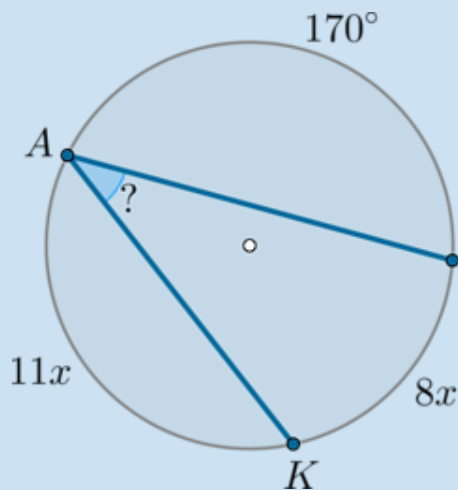


Задача



ТИАМЕ

Точки A и B делят окружность на две дуги, одна из которых равна 170° , а другая точкой K делится в отношении $11:8$, считая от точки A . Найдите $\angle BAK$.



Т.к. $\overset{\frown}{AK}:\overset{\frown}{KB}=11:8$, то можно обозначить

$$\overset{\frown}{AK}=11x, \overset{\frown}{KB}=8x.$$

$$\text{Дуга } \overset{\frown}{AKB}=360^\circ-170^\circ=190^\circ.$$

$$\text{Следовательно, } 11x+8x=19x=190^\circ \Rightarrow x=10^\circ$$

$$\text{Значит, дуга } \overset{\frown}{KB}=8x=80^\circ.$$

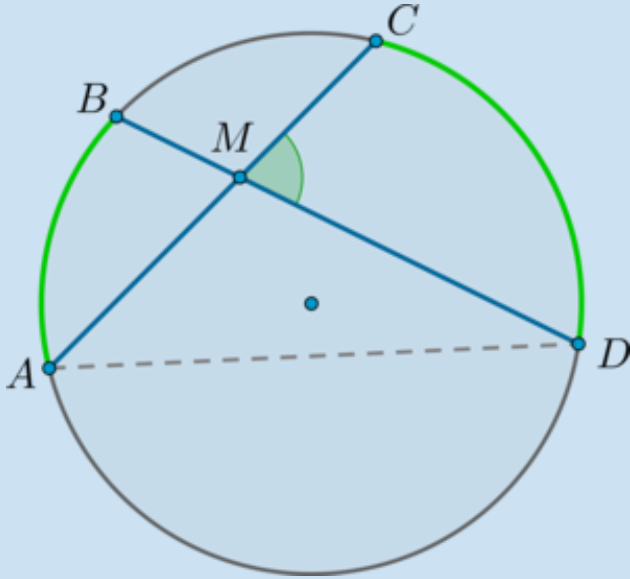
Угол BAK вписанный и опирается на эту дугу, следовательно, он равен ее половине, то есть 40° .

Ответ: 40



ТИАМЕ

Теорема

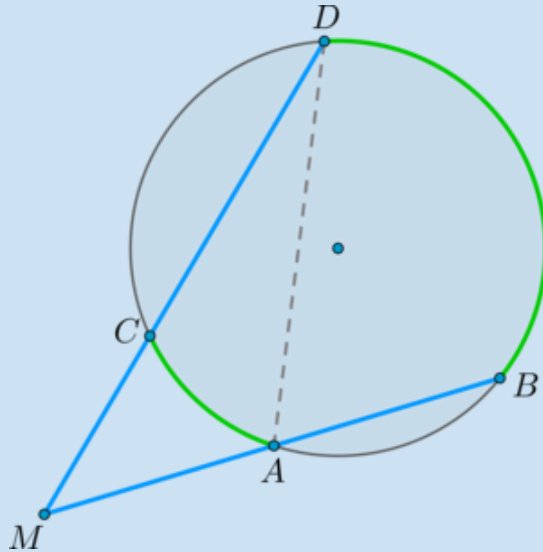


Угол между двумя
пересекающимися
хордами равен
полусумме градусных
мер высекаемых ими
дуг

$$\angle CMD = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD})$$



Теорема



- Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности градусных мер большей и меньшей высекаемых ими дуг

$$\angle DMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CA}) .$$

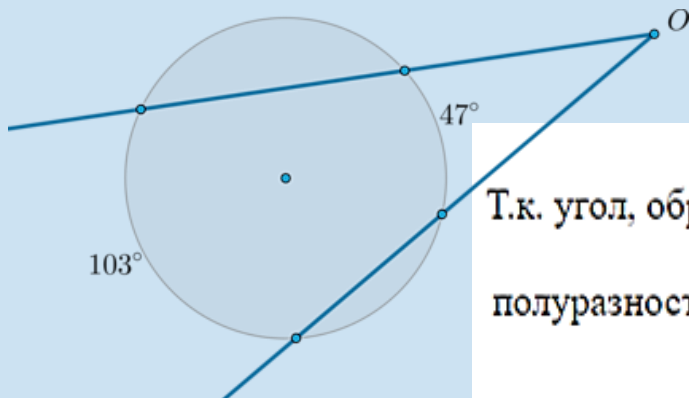


Задача



ТИАМЕ

Найдите угол между двумя секущими, проведенными к окружности из точки O вне окружности, если дуги, заключенные между этими секущими, равны 103° и 47° .

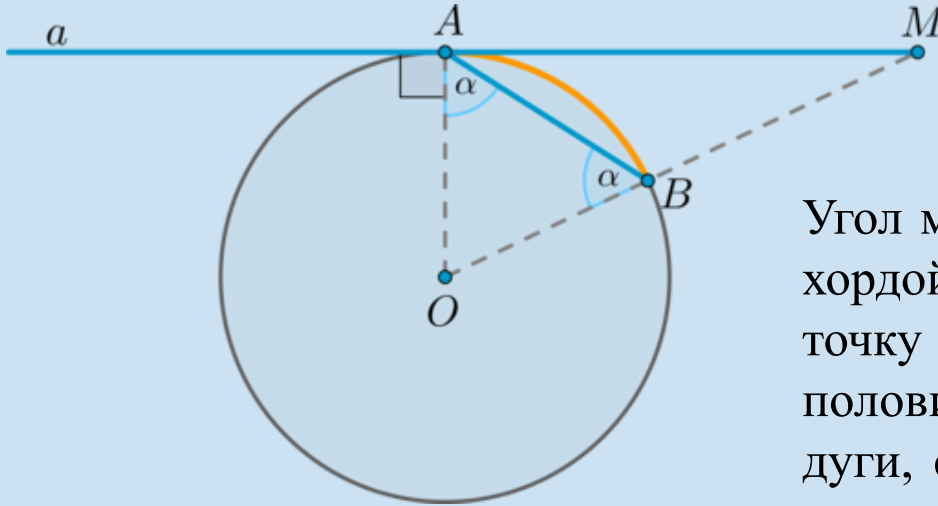


Т.к. угол, образованный двумя такими секущими, равен полуразности дуг, заключенных между ними, то

$$\angle O = \frac{1}{2}(103^\circ - 47^\circ) = 28^\circ.$$

Ответ: 28

Теорема



Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине градусной меры дуги, стягиваемой хордой.

$$\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{AB}.$$

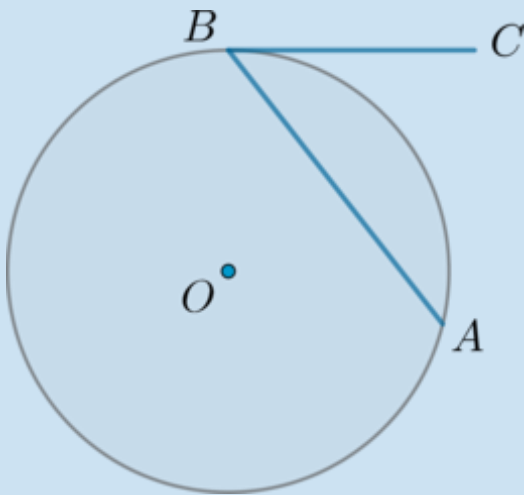


Задача



TIAME

Хорда АВ стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку В.



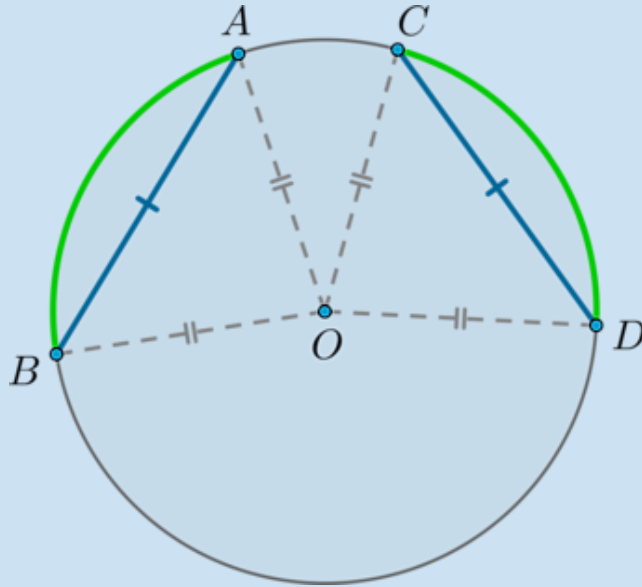
Так как угол между хордой и касательной, проведенными из одной точки окружности, равен половине дуги, заключенной между ними, то $\angle ABC = 0,5 \cdot 92^\circ = 46^\circ$.

Ответ: 46°



ТИАМЕ

Теорема о дугах, стягиваемых равными хордами

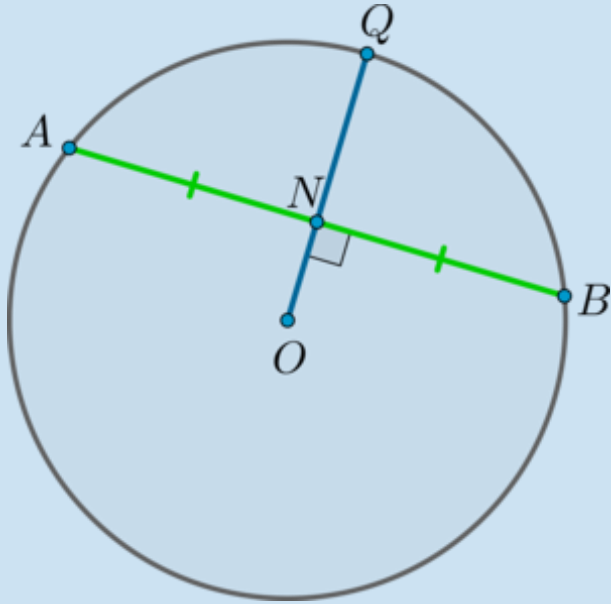


Равные хорды стягивают
равные дуги, меньшие
полуокружности. И
наоборот; равные дуги
стягиваются равными
хордами.

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}.$$



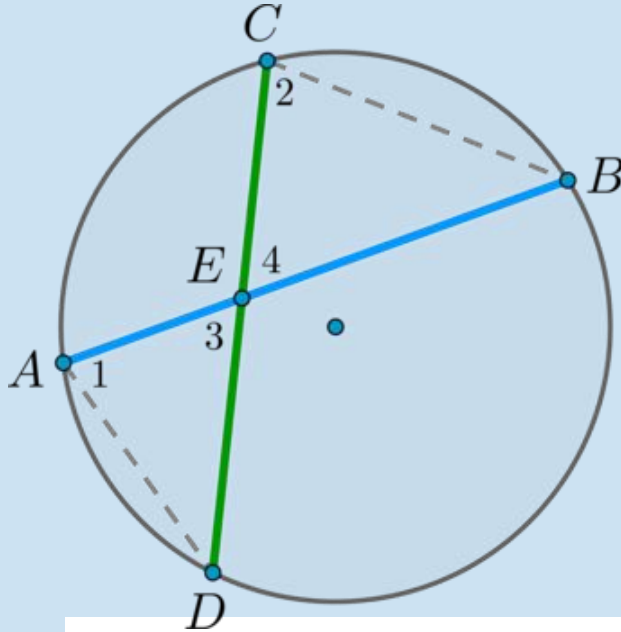
Теорема



Если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен. Верно и обратное: если радиус перпендикулярен хорде, то точкой пересечения он делит ее пополам.



Теорема о произведении отрезков хорд



Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE .$$



Задача



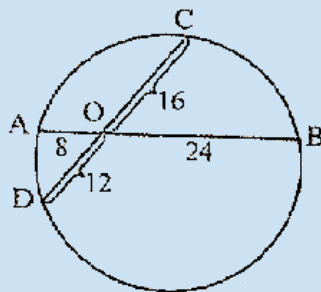
ТИАМЕ

Одна из пересекающихся хорд равна 32 см, а вторая в точке пересечения делится на отрезки 12 см и 16 см. Найти отрезки первой хорды.

Решение: По теореме $AO \cdot BO = 16 \cdot 12$.

Если длина отрезка AO равна x , то

$$BO = 32 - x.$$



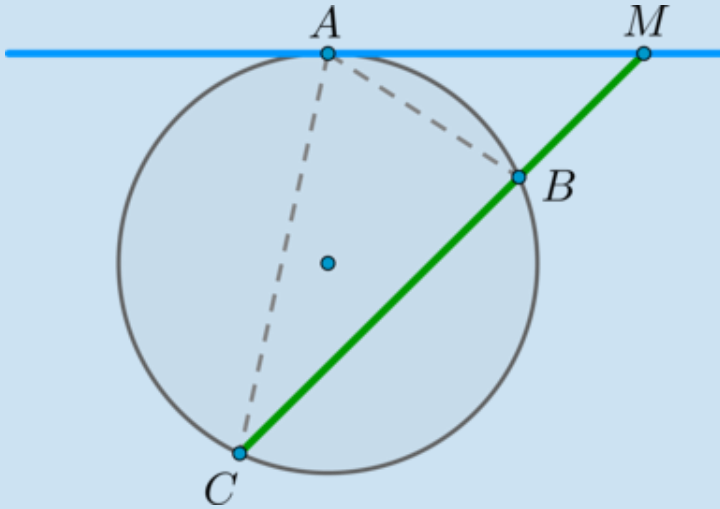
Тогда получим уравнение $x(32 - x) = 16 \cdot 12$.

Корни этого квадратного уравнения $x_1 = 8$,

$x_2 = 24$. Итак, отрезки первой хорды 24 и 8.



Теорема о касательной и секущей



Квадрат отрезка касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

$$MB \cdot MC = MA^2 .$$



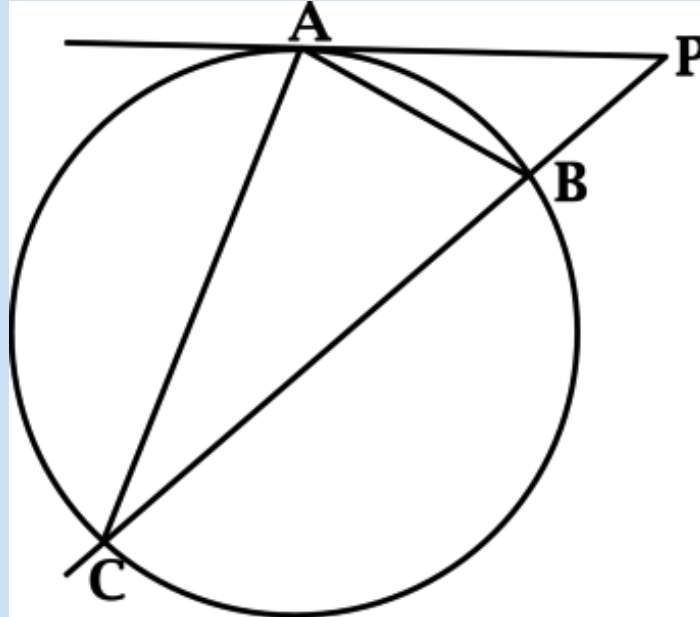
Задача



ТИАМЕ

Луч PA касается окружности в точке A , а луч PC пересекает эту окружность в точках B и C . При этом $PA=4$, $PC=8$. Найдите PB .

Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей: $AP^2 = PB \cdot PC$. Покажем это: Соединим AB и AC





TIAME

Рассмотрим треугольники APB и APC :

$\angle APC$ – общий,

Так как угол между касательной и хордой равен половине градусной меры дуги окружности, заключённой внутри него, то

$$\angle PAB = 0,5 \cdot \smile AB = \angle ACB .$$

Таким образом, треугольники APC и APB – подобны по двум углам.

Из их подобия следует, что

$$\frac{AP}{PC} = \frac{PB}{AP}$$

откуда можно получить $AP^2 = PB \cdot PC$.

В данной задаче имеем: $16 = PB \cdot 8$, откуда $PB = 2$.

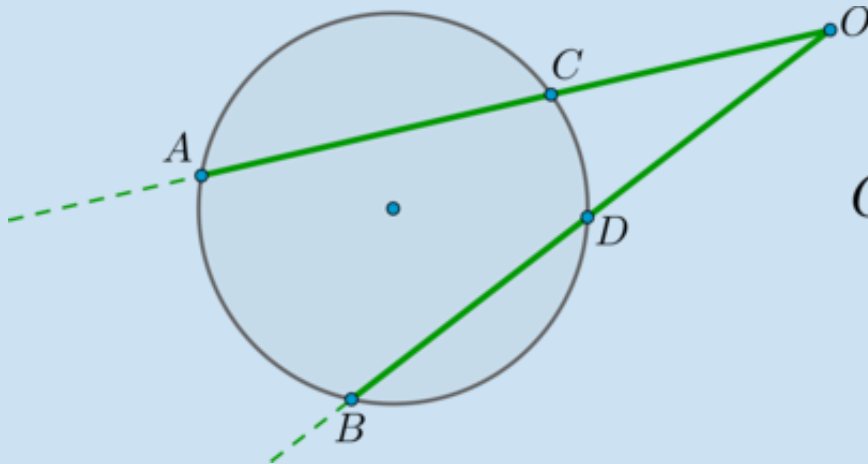
Ответ: 2



Следствие

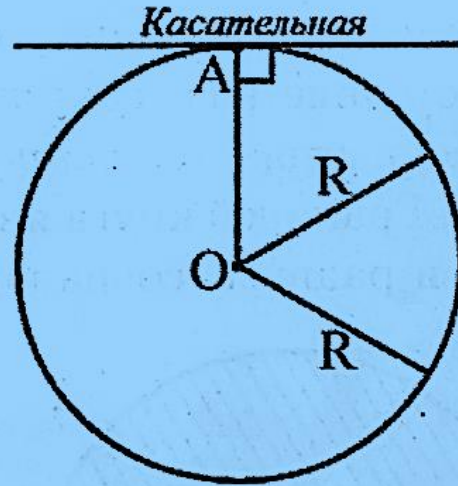


Произведение секущей, проведённой из точки O , на её внешнюю часть не зависит от выбора секущей, проведённой из точки O .



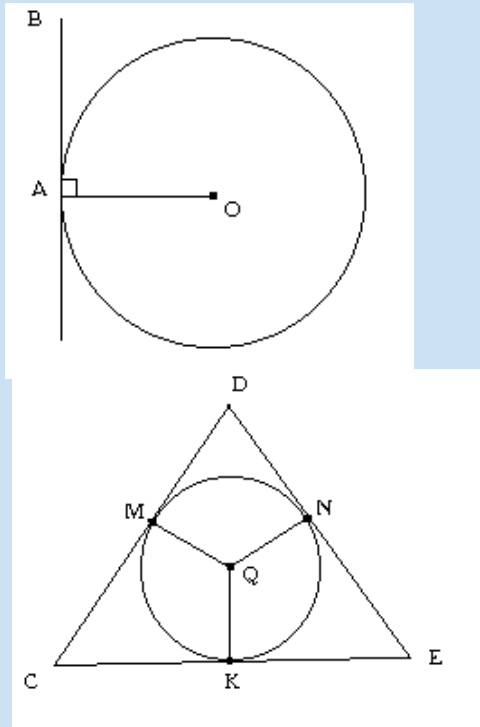
$$OA \cdot OC = OB \cdot OD$$

Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному к этой точке называется *касательной* к окружности
Здесь точка окружности называется *точкой касания*.





Касательная к окружности



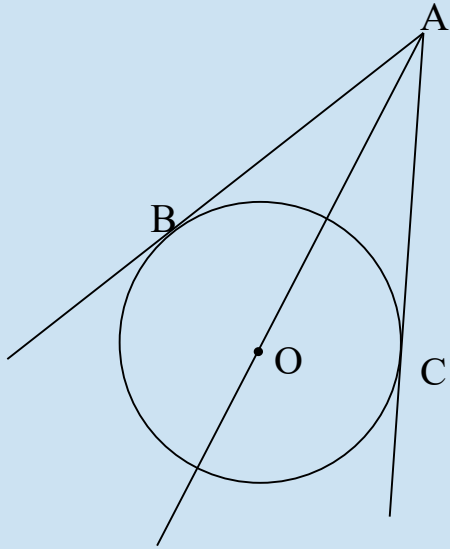
Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности. Общая точка окружности и касательной называется точкой касания.



Свойства отрезков касательной.



TIAME



Отрезки двух касательных, проведенных к окружности из точки вне ее, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром.



ТИАМЕ

Длины хорд АВ и АС, проведенных из точки окружности А соответственно равны 5 и 12. Если соединить их другие концы, получается треугольник с площадью 15. Найдите острый угол между хордами АВ и АС.

- А) 30° В) 15° С) 45° D) 60°



TIAME

На сколько см удалена хорда длиной
8 см от центра окружности радиуса 5?

- A) 3 B) 4 C) 2,6 D) 2,8



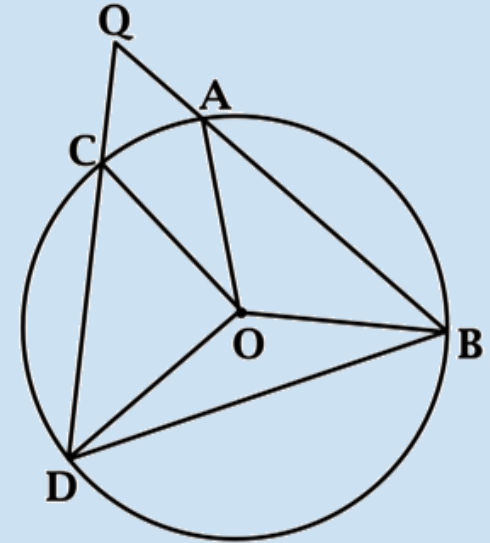
Задача



Точки B и D треугольника QBD лежат на окружности с центром в точке O , C – вторая точка пересечения QD с окружностью, A – вторая точка пересечения QB с окружностью. Известно, что $QA=QC$, дуги CD и AB равны, $\angle QBD=63^\circ$. Найдите $\angle BQD$.

Равные дуги стягивают равные хорды: $DC=AB$.

Построим радиусы OC и OA





ТИАМЕ

Так как дуги CD и AB равны, то их градусные меры совпадают, тогда $\angle COD = \angle AOB$, как центральные углы, опирающиеся на равные дуги. $CO = OD = AO = OB$, как радиусы, тогда треугольники AOB и DOC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $DC = AB$. $QD = QC + CD = QA + AB$, тогда треугольник QBD – равнобедренный и $63^\circ = \angle QBD = \angle QDB$, значит $\angle BQD = 180^\circ - 63^\circ - 63^\circ = 54^\circ$. Ответ: 54

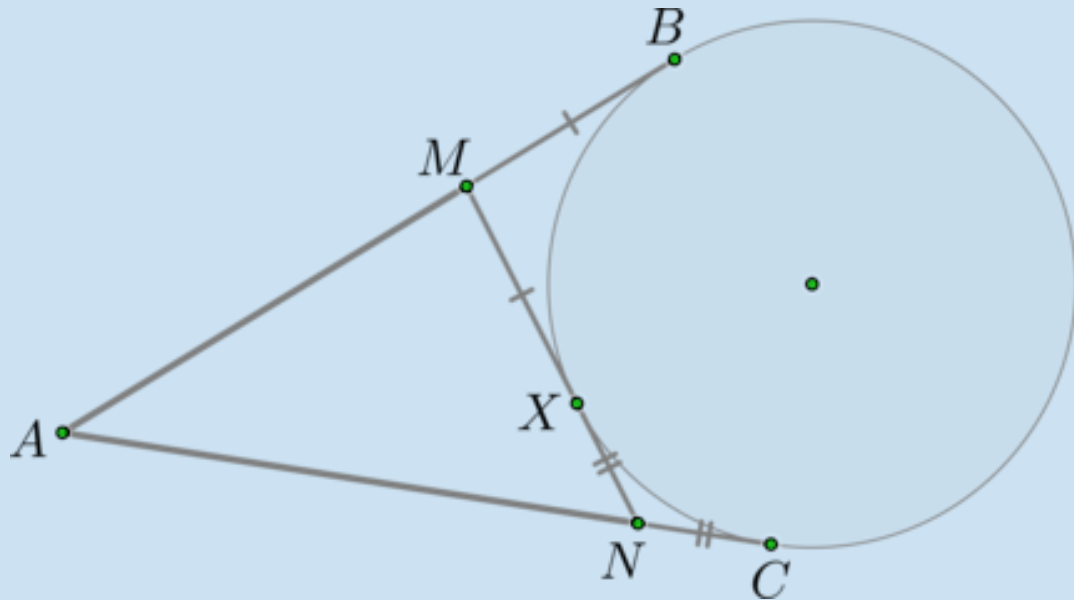


Задача



ТИАМЕ

Из точки A вне окружности проведены две касательные AB и AC (где B, C – точки касания). Через произвольную точку X на окружности проведена касательная к окружности, пересекающая AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр треугольника AMN , если $AB=10$.





TIAME

Т.к. отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, то $AB=AC=10$, $MB=MX$ и $NC=NX$.

Следовательно, периметр

$$\begin{aligned} P_{\triangle AMN} &= AM+MN+AN=AM+(MX+XN)+AN = \\ &= AM+(MB+NC)+AN=(AM+MB)+(NC+AN)=AB+AC \\ &=10+10=20. \end{aligned}$$

Ответ: 20