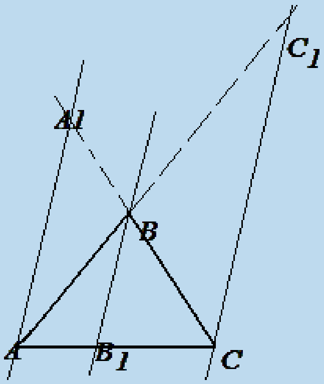
Теорема Менелая и теорема Чевы

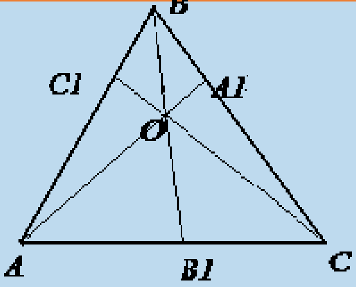
Преподаватель: Каландарова Г.И

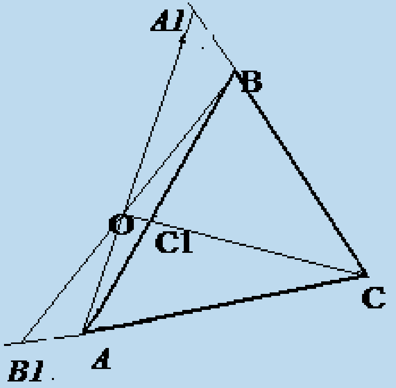
Теорема Чевы

- ***Пусть в ΔABC на сторонах BC, AC, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$



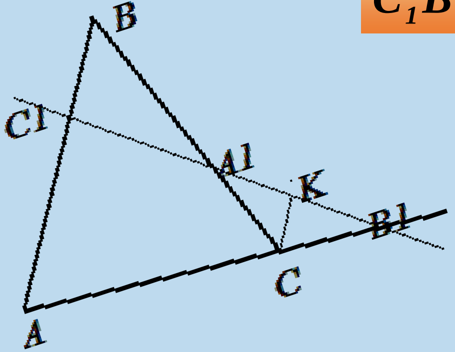


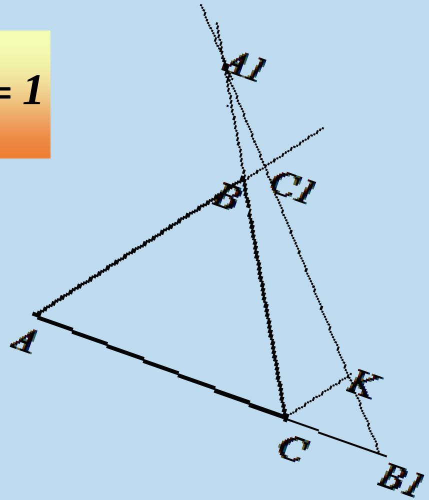


Теорема Менелая

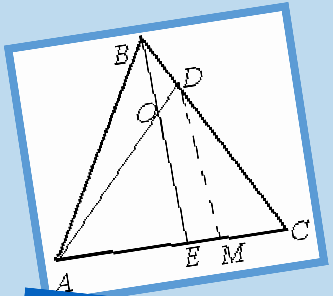
- ***Пусть на сторонах AB, BC и на продолжении стороны AC (либо на продолжениях сторон AB,BC и AC) ∆ABC взяты соответственно точки C_1,A_1 и B_1, не совпадающие с вершинами ∆ABC . Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

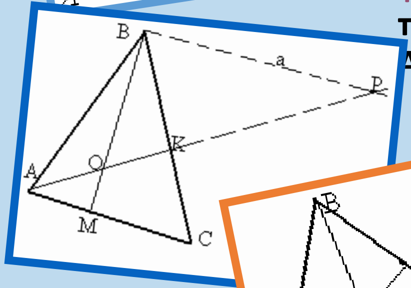




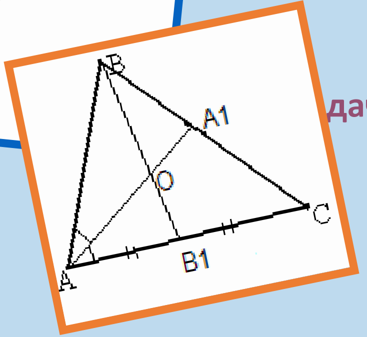
Теорема Менелая и пропорциональные отрезки в треугольнике



Задача 1. **В треугольнике АВС точка D делит сторону ВС в отношении BD:DC= 1: 3, а точка О делит AD в отношении AO:OD=5:2. В каком отношении прямая ВО делит отрезок АС?**



Задача 2. **В ΔАВС на стороне АС взята точка М, а на стороне ВС – точка К так, что АМ: МС= 2:3, ВК: КС= 4:3. В каком отношении АК делит отрезок ВМ?**



дача 3. **В ΔАВС AA_1 - биссектриса,**

BB_1- медиана; АВ=2, АС=3;

Найти ВО: OB_1

Теорема Чевы и ее следствия.

- **[Следствие1](). Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.**
- **[Следствие 2](). Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**
- **[Следствие3](). Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.**

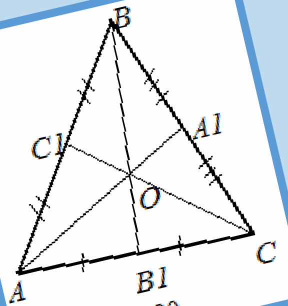


рис.20

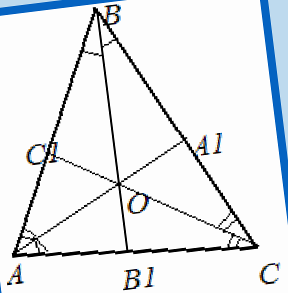


рис.21

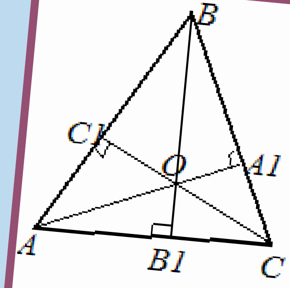
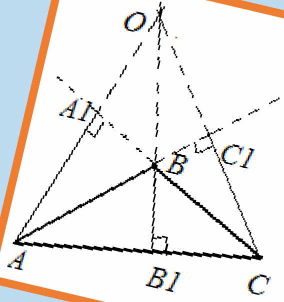


рис. 13



Теорема Чевы и ее следствия.

- Следствие4. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
- Следствие 5. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

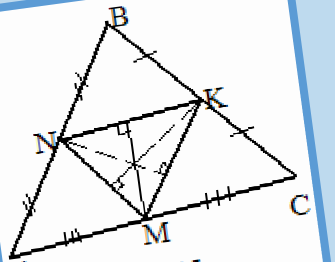


рис.25

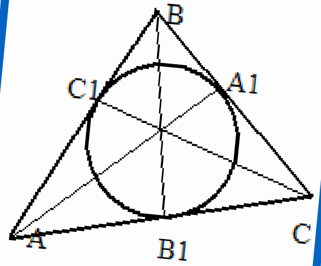


рис.26

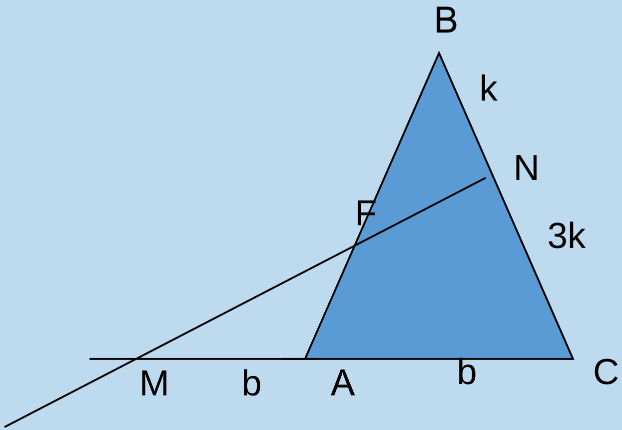
Задача 1.

В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC = 3BN; на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA=AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке F. Найдите: отношение

$$\frac{BF}{FA}$$

Решение

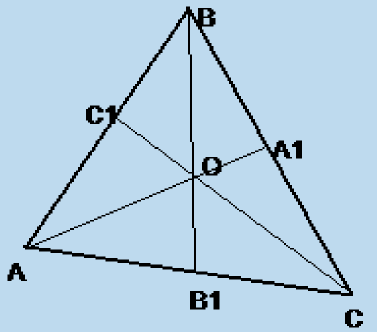
- По условию задачи MA = AC, NC = 3BN. Пусть MA = AC = b,
- BN = k, NC = 3k. Прямая MN пересекает две стороны треугольника ABC и продолжение третьей. По теореме Менелая



$$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AM}{MC}=1,\ \frac{3_k}{k}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{b}{2_b}=1,\ \frac{BF}{FA}\cdot\frac{3}{2}=1,\ \frac{BF}{FA}=\frac{2}{3}.$$

Ответ:2:3.

Применение теорем Чевы и Менелая к задачам на доказательство



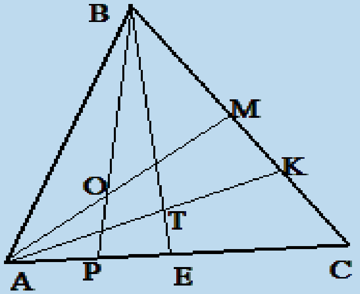


рис.28

- **Задача 1.** **Используя теорему Чевы, доказать, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам, пересекаются в одной точке.**
- **Задача 2.** **На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E , на стороне BC – точки M и K, причем AP: PE: EC= CK: KM: MB. Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE – в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.**

Задачи на пропорциональное деление отрезков в треугольнике.

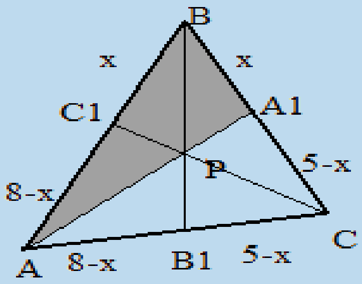
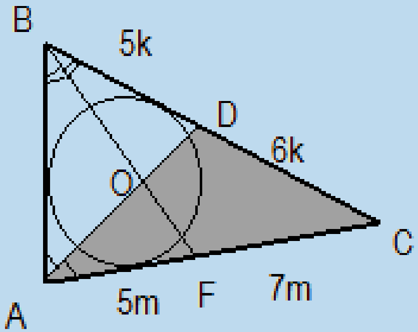


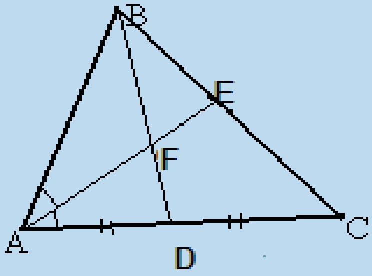
рис.30



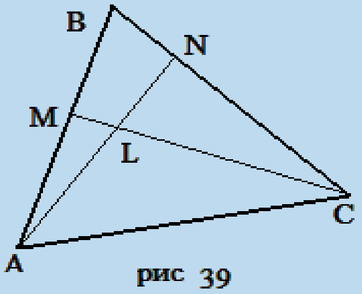
- **Задача 1. В треугольнике ABC, описанном около окружности, AB = 8, BC = 5, AC = 4. Точки A_1,B_1 и C_1 - точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC,AC и BA. Точка P - точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1. Найдите $AP:PA_1$.**

- **Задача 2. Стороны треугольника 5, 6 и 7. Найдите отношение отрезков, на которые биссектриса большего угла этого треугольника разделена центром окружности, вписанной в треугольник.**

Задачи, связанные с нахождением площадей



- **Задача 1.** **Медиана BD и биссектриса AE треугольника ABC пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника ABC , если AF=3FE, BD=4, AE=6.**



- **Задача 2.** **На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML , CNL и ALC равны соответственно 15, 48 и 40. Найти площадь треугольника ABC.**

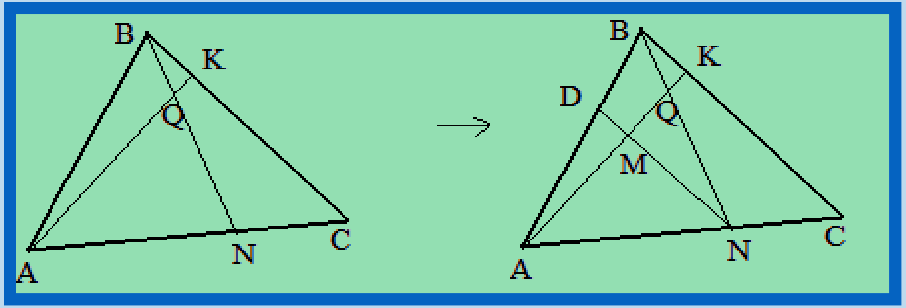
Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии

Теорема Менелая и теорема Чевы.

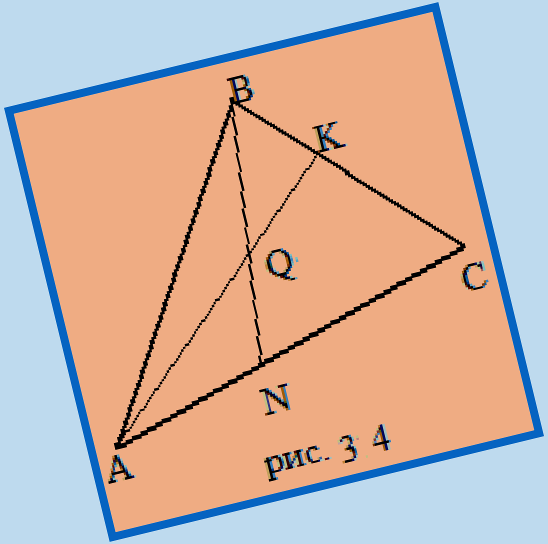
Задача. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка N так, что AN:NC=m:n, на стороне BC- точка K. BN пересекает AK в точке Q, BQ : QN= p:q. Найти отношение площадей треугольников AKC и ABK.

$S_{AKC} : S_{ABK} = KC : BK$ (т.к. высоты равны)

I способ. Дополнительное построение:
ND // BC.



II способ. **Рассмотрим треугольник BCN и секущую AK. По теореме Менелая**



$$\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{NA}{AC}=1;\frac{CK}{KB}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{m+n}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CK}{KB}=\frac{(m+n)q}{mp}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{AKC}:S_{ABK}=\frac{CK}{KB}=\frac{(m+n)q}{mp}.$$

Изучение темы «Теорема Менелая и теорема Чевы» в курсе геометрии

Применение теорем Менелая и Чевы в решении ключевых задач

Цели урока: **1) формировать умения:**

- **-видеть конфигурации, удовлетворяющие заданным условиям;**
- **-решать задачи нестандартными способами;**
- **-использовать теоремы в задачах на доказательство;**

2) развивать самостоятельность.

Задача. В равнобедренном треугольнике ABC (AC=BC) проведены медиана BN и высота AM, которые пересекаются в точке D. AD=5, DM=2. Найти

$$S_{ABC}$$

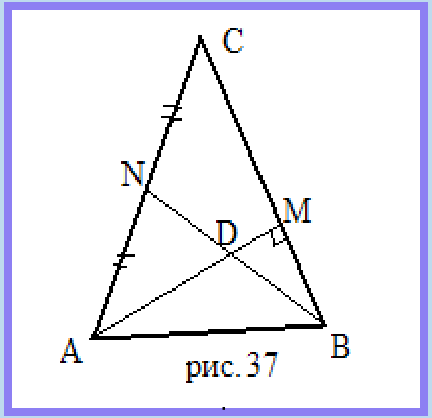


рис. 37

Решение: AN=NC, AM=5+2=7.

Рассмотрим ΔAMC и секущую NB.

По теореме Менелая

$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{MD}{DA}=1\Rightarrow 1\cdot\frac{CB}{BM}\cdot\frac{2}{5}=1 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{CB}{BM}=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{CM}{BM}=\frac{3}{2}$$

Пусть коэффициент пропорциональности равен k, тогда CM=3k, BM=2k. Из ΔACM- прямоугольного:

$$AC^2=CM^2+AM^2 \Rightarrow AC^2=9k^2+49 \qquad AC=CB\Rightarrow AC=5k \Rightarrow 25k^2=9k^2+49$$

$$k=\frac{7}{4} \Rightarrow CB=5k=\frac{35}{4} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot CB\cdot AM=\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{4}\cdot 7=\frac{245}{8}$$

Ответ: $\frac{245}{8}$

Теорема Стюарта

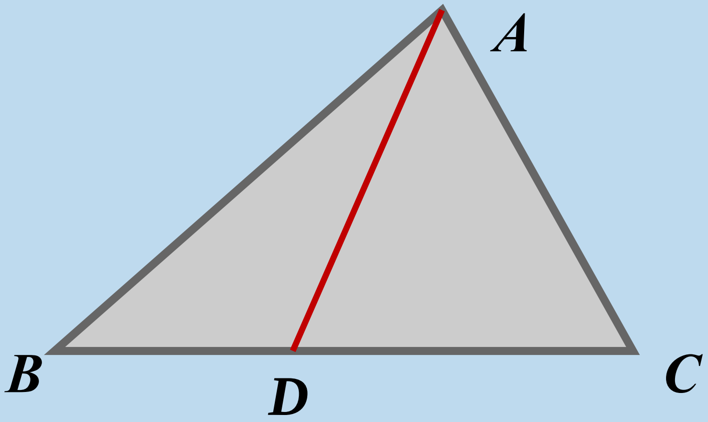
М. **Стюарт** (**Stewart** Matthew 1717-1785) – **английский математик,**

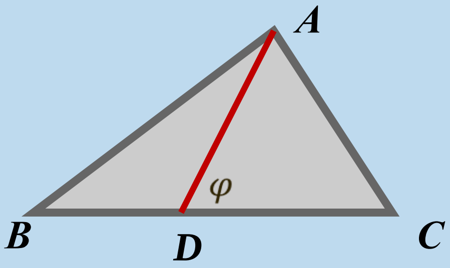
опубликовавший теорему в 1746 в труде « Некоторые общие теоремы ».

Теорема.

Произведение квадрата расстояния от точки, лежащей на стороне треугольника, до противоположной вершины на длину этой стороны равно сумме квадратов оставшихся сторон на несмежные с ними отрезки первой стороны без произведения этих отрезков на длину основания.

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$$





Доказательство:

Пусть $\angle ADC = \varphi$, тогда
$\angle ADB = 180^\circ - \varphi$

Из $\triangle$ ADC

$$\cos\varphi = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} \qquad (1)$$

Из $\triangle$ ADB

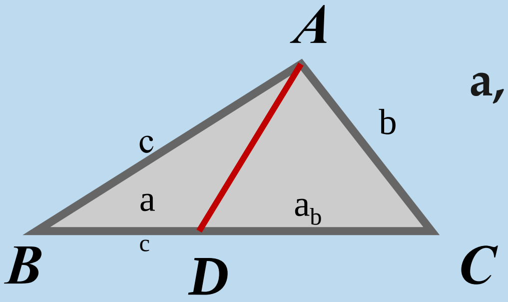
$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} \qquad (2)$$

Сложив по частям (1) и (2), получаем:

$$0 = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} + \frac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD}$$ **, умножив на 2AD**

получаем $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$

Вычисление медианы треугольника:



Дано:

ABC

a, b, c- стороны треугольника

a_c ,a_b - части a

m_a- медиана к стороне a

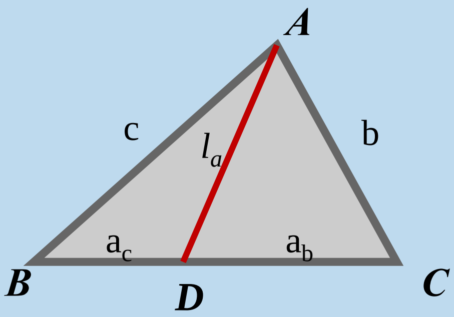
Найти:

m_a

Решение:

$m_a^2 a= c^2ab + b^2ac - a_c a_b a$ **- по теореме Стюарта**

Вычисление биссектрисы треугольника



Дано:

$\triangle ABC$

l_a - биссектриса к стороне а

Найти:

l_a

Решение:

$$l_a^2 a = c^2 a_b + b^2 a_c - a_b a_c a$$ **- по теореме Стюарта**

Используя свойство биссектрисы треугольника, которая делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, получаем:

$$l_a^2 = bc - a_b a_c$$

№ 1. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC, AB=14 см, BC=20 см, AC= 21 см. Найти AD.

Ответ: $3\sqrt{22}$ см

№2. Отрезок AD является медианой треугольника ABC, AB=12см, BC=16 см, AC=20 см. Найти AD.

Ответ: $4\sqrt{13}$ см

№3. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B, а длины сторон, противолежащим этим углам, соответственно равны 12 см и 8 см. Найти длину третьей стороны треугольника.

Ответ: 10 см