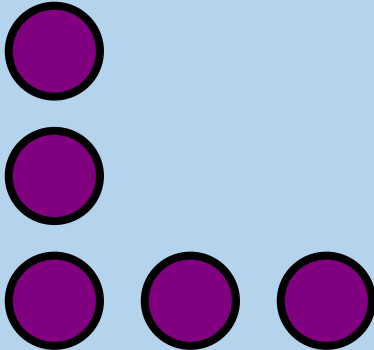




ОКРУЖНОСТЬ



Преподаватель: Каландарова Г.И



Оглавление



- ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ
- ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И СВОЙСТВА
- СВОЙСТВА ХОРД
- КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ
- ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ
- УГЛЫ И ОКРУЖНОСТЬ
- ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ
- ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ



ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ



TIAME

- Окружность
- Круг
- Части окружности
- Характеристики окружности
- Отрезки в окружности
- Части круга
- Тест

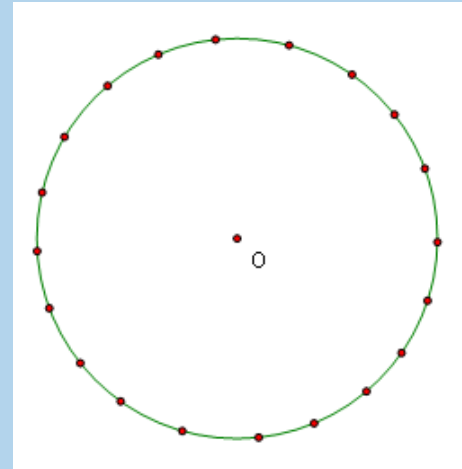


ТИАМЕ

Окружность

Окружностью называется геометрическая фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от заданной точки на заданное расстояние. Эта точка называется центром окружности.

О - центр
окружности





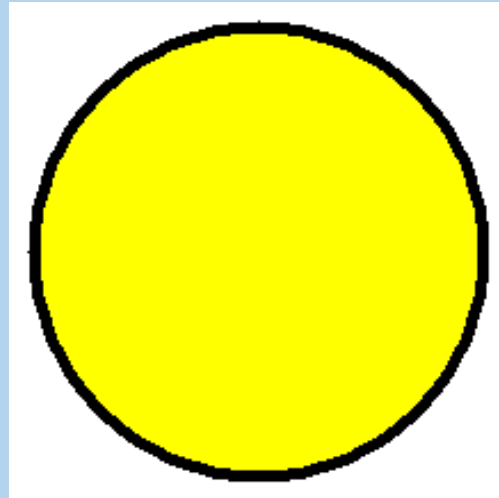
Круг



TIAME

Фигуру, ограниченную окружностью,
называют кругом .

КРУГ = Окружность +
часть плоскости,
ограниченная ею





Части окружности



ДУГИ



TIAME



ТИАМЕ

Характеристики окружности

ЦЕНТР

ДИАМЕТР

РАДИУС



ТИАМЕ

Отрезки в окружности

ХОРДА

ДИАМЕТР



Части круга



СЕКТОР

СЕГМЕНТ

ПОЛУКРУГ

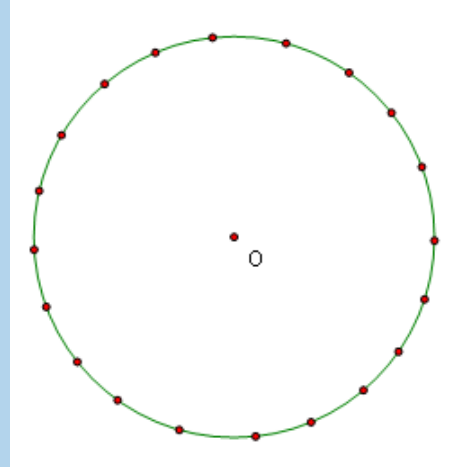


TIAME

Центр окружности

Точка, от которой равноудалены на заданное расстояние все точки окружности.

О - центр
окружности



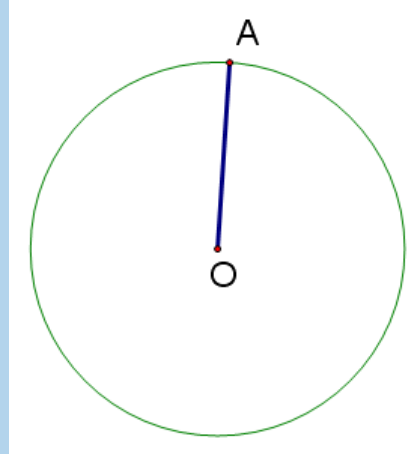


ТИАМЕ

Радиус окружности

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, а также его длина, называется радиусом окружности.

OA- радиус
окружности



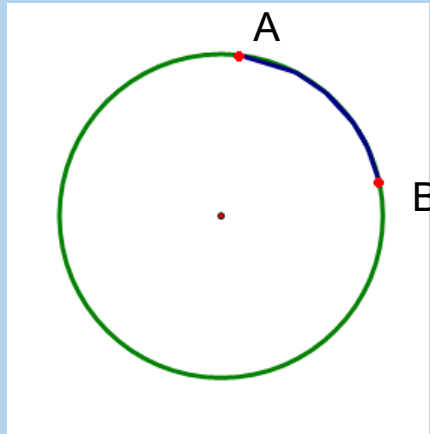


ТИАМЕ

Дуга окружности

Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части. Каждая из них называется дугой окружности, а данные точки - концами этих дуг.

$\cup AB$ - дуга
окружности



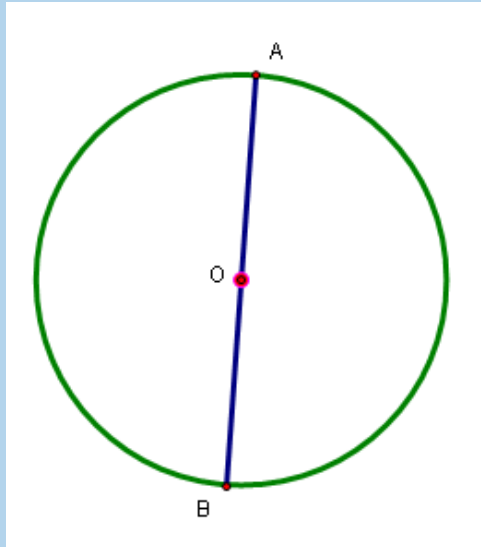


ТИАМЕ

Диаметр окружности

Диаметром окружности называется хорда данной окружности, проходящая через ее центр.

AB- хорда,
проходящая
через ее центр O



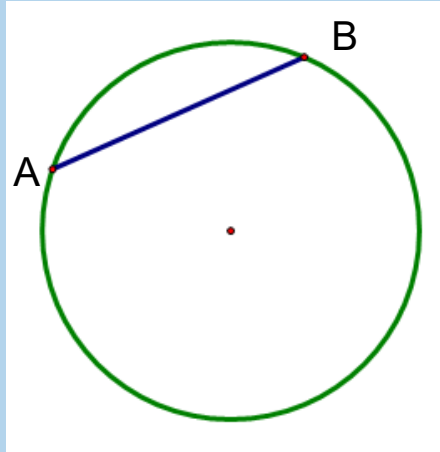


ТИАМЕ

Хорда окружности

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой окружности, а также хордой ограниченного ею круга.

AB- хорда
окружности



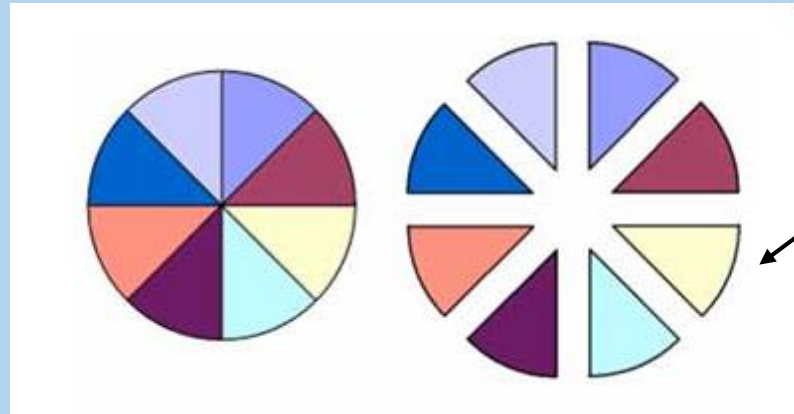


Сектор круга



TIAME

Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется сектором круга.

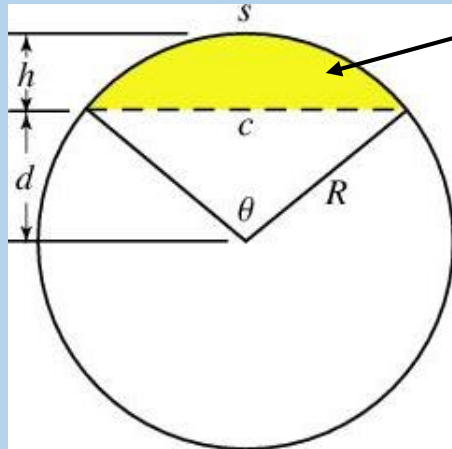


Сектор
круга



Сегмент круга

Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется сегментом круга.



Сегмент

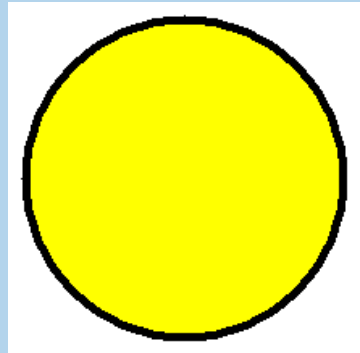


Полукруг



TIAME

Диаметр разбивает круг на два полукруга.
Полукруг ограничен диаметром и
полуокружностью.





ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И СВОЙСТВА

- Теорема о существовании окружности
- Теорема о диаметре, перпендикулярном к хорде
- Свойства диаметра окружности

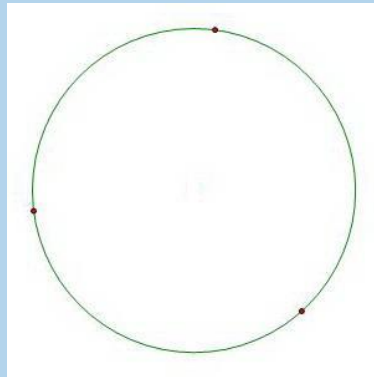


Сколько окружностей можно
провести через 3 точки, не лежащие
на одной прямой?



ТИАМЕ

Через три точки, не лежащие на одной прямой,
можно провести окружность и притом только одну.





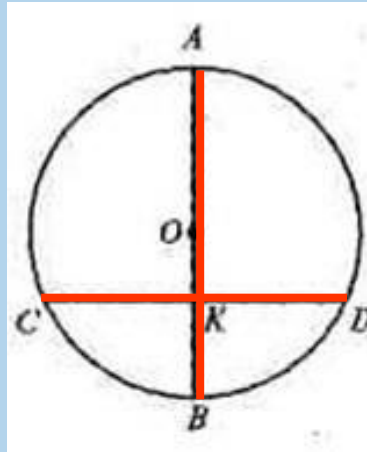
Теорема



ТИАМЕ

о диаметре, перпендикулярном к хорде

Диаметр AB , перпендикулярный к хорде CD , делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.





TIAME

Свойства диаметра окружности

1. Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.
2. Диаметр проведенный через середину дуги, перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.



СВОЙСТВА ХОРД



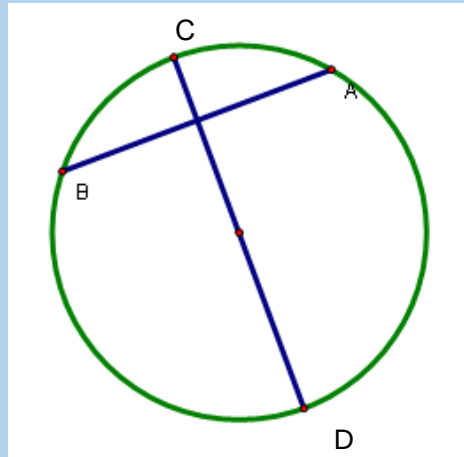
- Хорда, перпендикулярная к диаметру
- Диаметр, перпендикулярный к хорде
- Расстояние от центра до хорды
- Расстояние от центра до равных хорд
- Хорды, равноудаленные от центра
- Хорды, стягивающие равные дуги
- Равные хорды, стягивающие углы



TIAME

Свойство 1

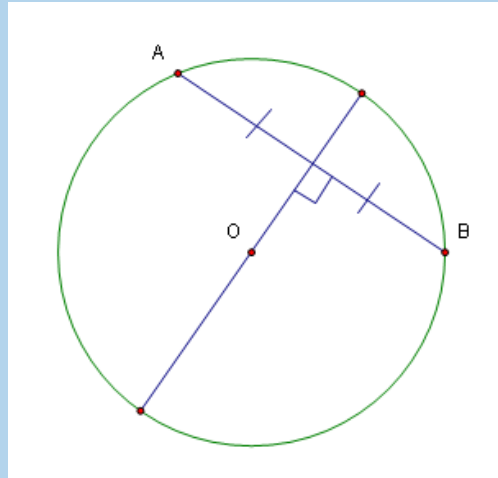
Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он перпендикулярен этой хорде.





Свойство 2

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

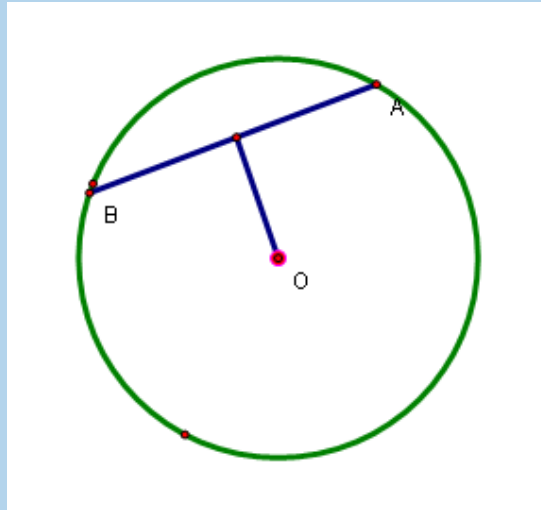




ТИАМЕ

Свойство 3

Расстояние от центра окружности до ее хорды - это расстояние от центра до середины хорды.



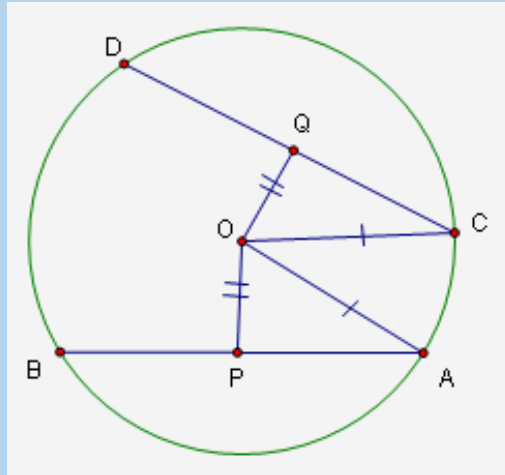


TIAME

Свойство 4

В окружности равные хорды равноудалены от центра.

$$AB = CD$$

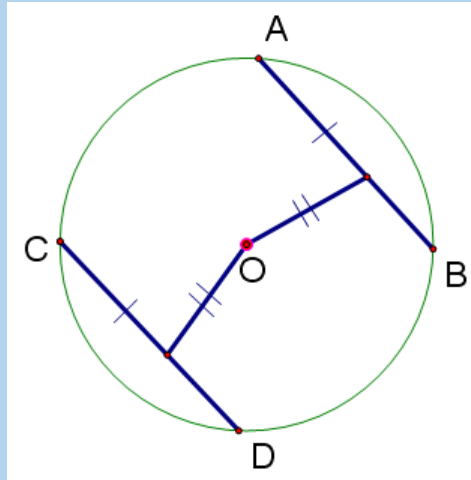




Свойство 5



Хорды, равноудаленные от центра, равны.

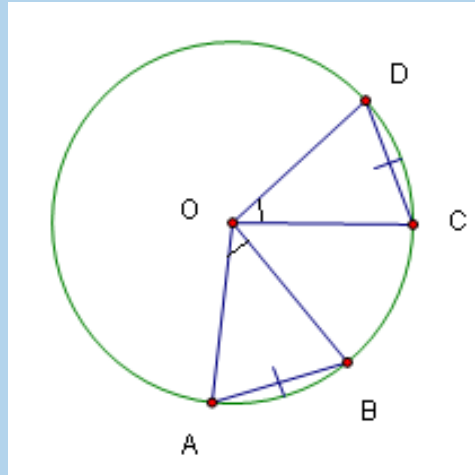




TIAME

Свойство 6

Хорды, стягивающие равные центральные углы данной окружности, равны.

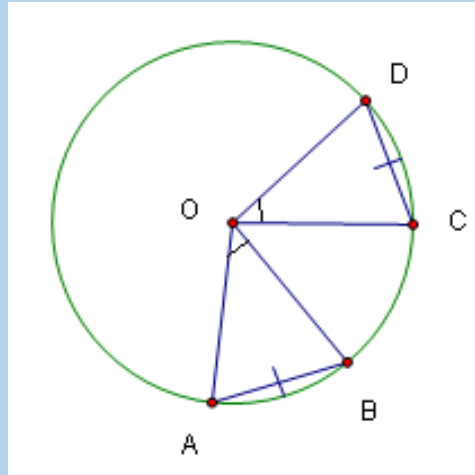




ТИАМЕ

Свойство 7

Равные хорды данной окружности стягивают равные центральные углы.





Случаи взаимного расположения прямой и окружности

- $d < r$
- $d = r$
- $d > r$

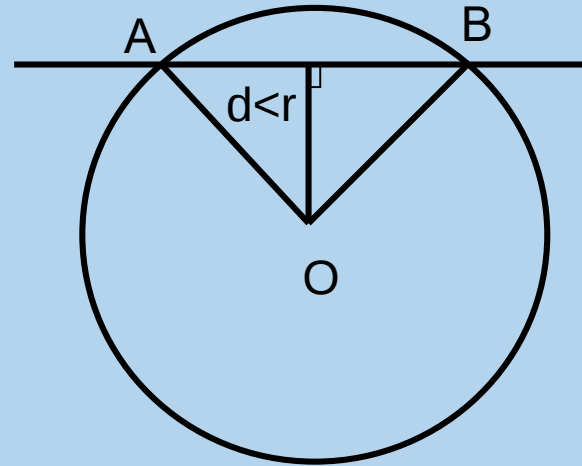


TIAME

$$d < r$$

Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки.

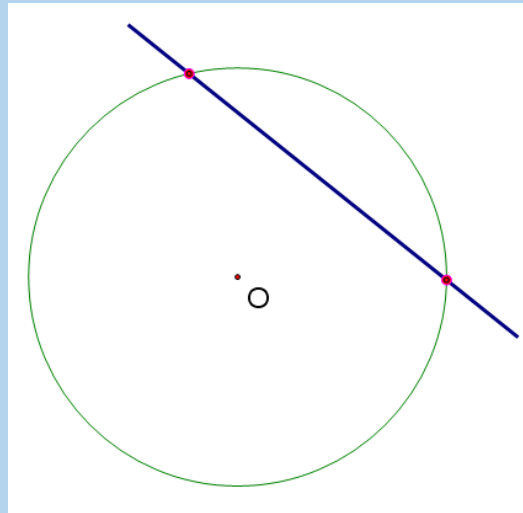
Прямая АВ называется секущей по отношению к окружности.





Секущая

Определение: Секущая – прямая, пересекающая окружность в двух точках.

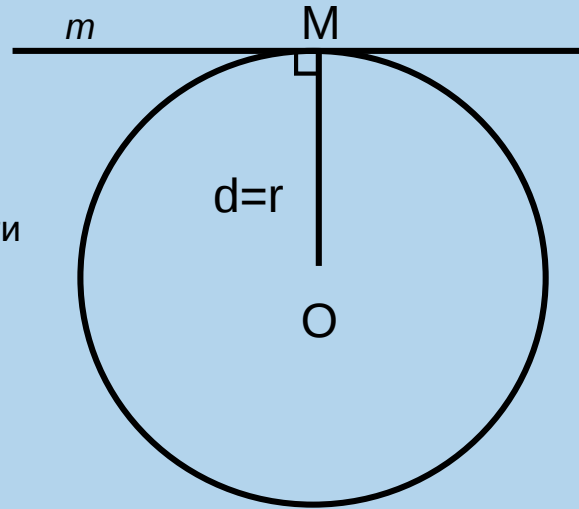




TIAME

$$d=r$$

Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.



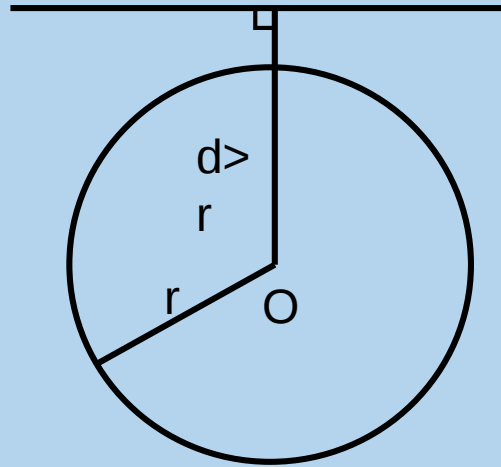
m – касательная по отношению к окружности



TIAME

$$d > r$$

Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.

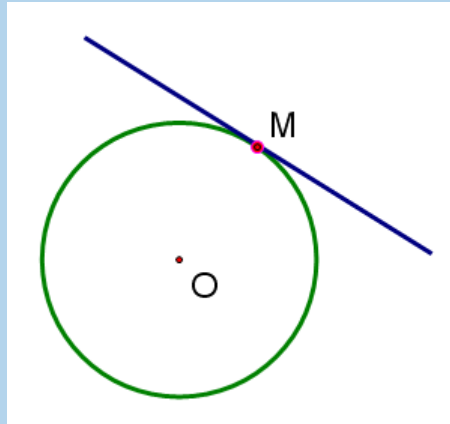




Касательная

Определение:

Прямая, имеющая с только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.





Свойство касательной

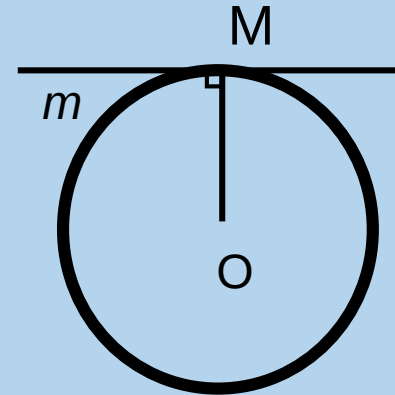
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания

t – касательная к окружности с центром O

M – точка касания

OM - радиус

$$t \perp OM$$





TIAME

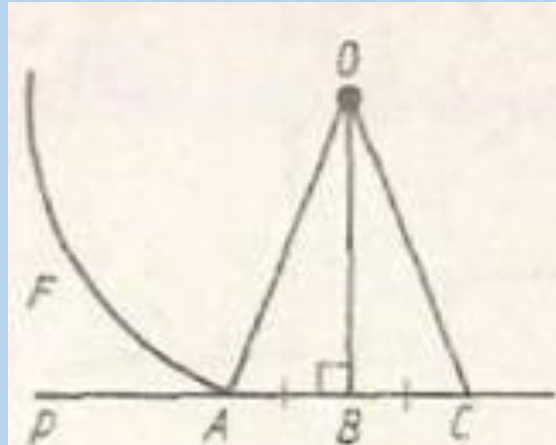
Свойство касательной.

Пусть прямая p касается окружности в точке A , т. е. A — их единственная общая точка.

Доказательство «от противного»:

1. Допустим, что p не перпендикулярна радиусу OA . Проведем перпендикуляр OB на p .
2. Отложим на p отрезок $BC = BA$.
3. $\triangle OBA = \triangle OBC$ (по двум катетам). Поэтому $OC = OA$.
4. C лежит на окружности. Следовательно, p и окружность имеют две общие точки, что невозможно.

Итак, $p \perp OA$, что и требовалось





TIAME

Признак касательной

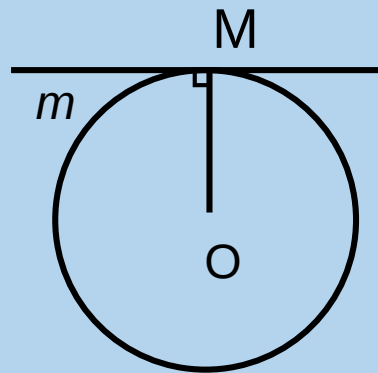
Если прямая проходит через конец радиуса, и перпендикулярна ему, то она является касательной.

t – прямая, которая проходит
через точку M

и

t – касательная

$$t \perp OM$$



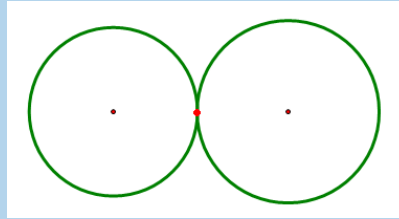


Положение двух окружностей

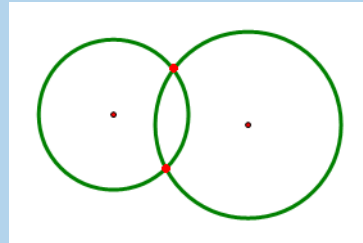


ТИАМЕ

Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются.



Если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они пересекаются.

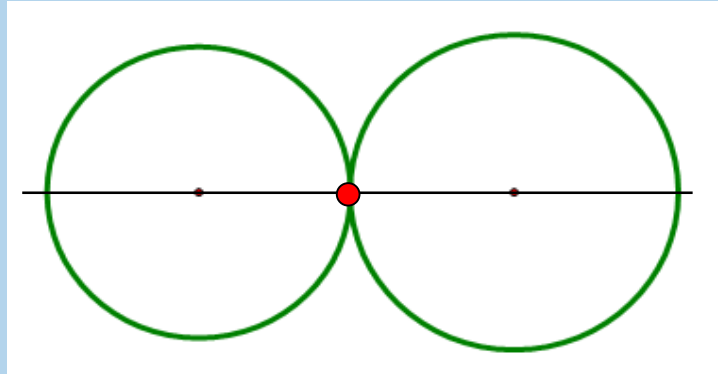




ТІАМЕ

ТЕОРЕМА (о точке касания)

Если две окружности имеют общую точку на линии их центров, то они касаются.

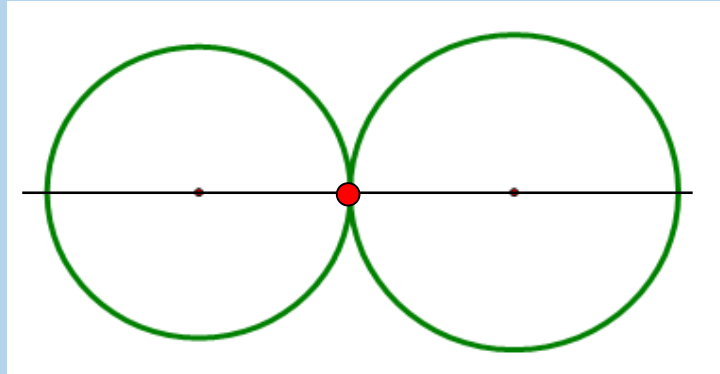




ТИАМЕ

ТЕОРЕМА (обратная предыдущей)

Если две окружности касаются в точке, то эта точка касания лежит на линии центров.



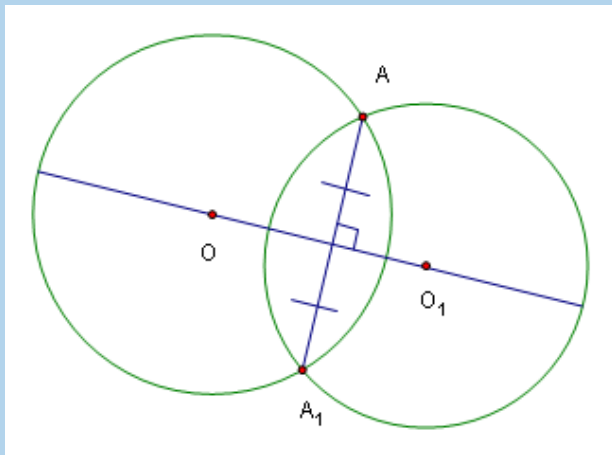


Свойство общей хорды двух окружностей



ТИАМЕ

Общая хорда AA_1 двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.





Различные случаи относительного положения двух окружностей.

- $d > R + R_1$
- $d = R + R_1$
- $d < R + R_1$
- $d = R - R_1$
- $d < R - R_1$

d – расстояние между центрами окружностей

R и R_1 – радиусы окружностей

Обратные предложения

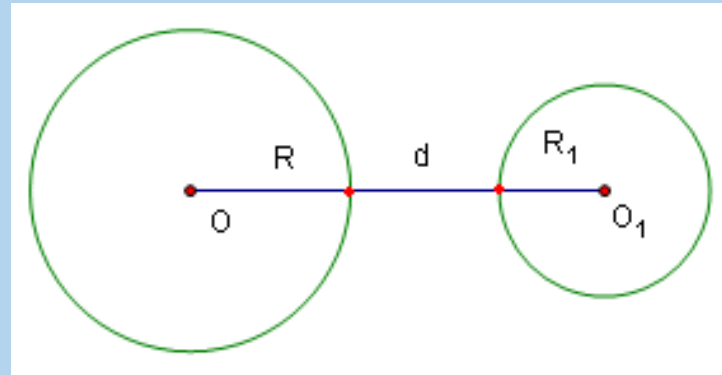


ТИАМЕ

1. Окружности лежат одна вне другой, не касаясь в этом случае, очевидно, $d > R + R_1$

R и R_1 - радиусы
окружностей

d - расстояние
между центрами
окружностей

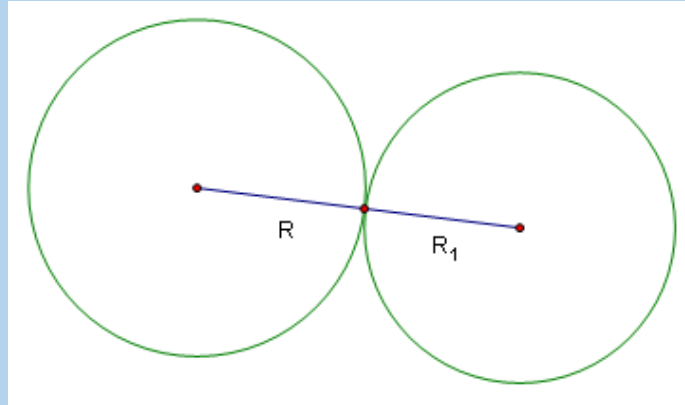




2. Окружности имеют внешнее касание, тогда $\underline{d = R + R_1}$, так как точка касания лежит на линии центров.

R и R_1 - радиусы
окружностей

d - расстояние
между центрами
окружностей



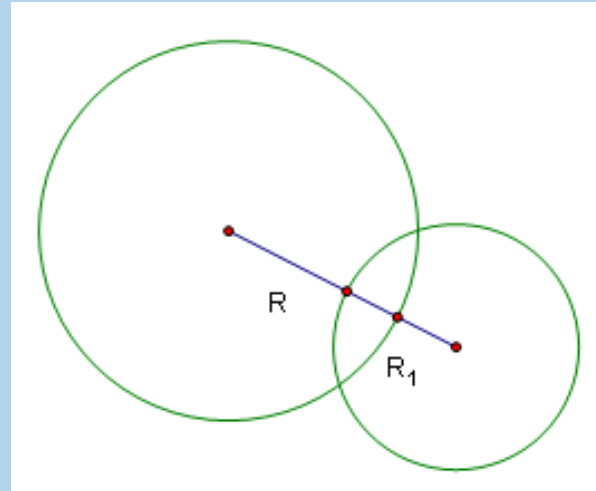


TIAME

3. Окружности пересекаются тогда $d < R + R_1$

R и R_1 - радиусы
окружностей

d - расстояние
между центрами
окружностей



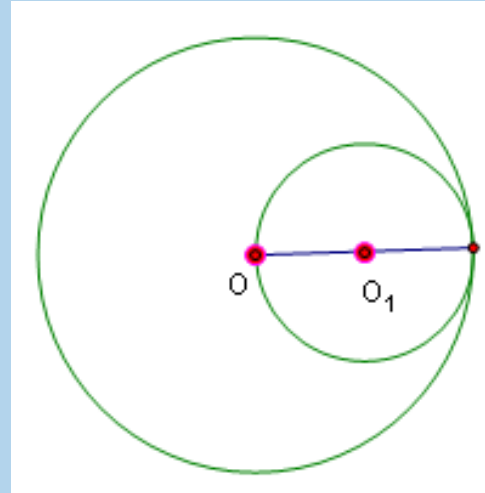


TIAME

4. Окружности имеют внутреннее касание в этом случае $d = R - R_1$, потому что точка касания лежит на линии центров.

R и R_1 - радиусы
окружностей

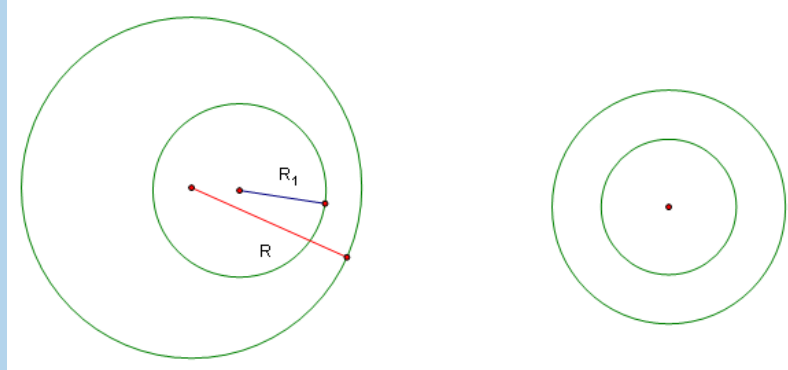
d - расстояние
между центрами
окружностей



5. Одна окружность лежит внутри другой, не касаясь, тогда, очевидно, $d < R - R_1$ и в частном случае $d = 0$, когда центры обеих окружностей сливаются (такие окружности называются концентрическими).

R и R_1 - радиусы
окружностей

d - расстояние
между центрами
окружностей





Обратные предложения



1. Если $d > R + R_1$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.
2. Если $d = R + R_1$, то окружности касаются извне.
3. Если $d < R + R_1$ и в то же время $d > R - R_1$, то окружности пересекаются.
4. Если $d = R - R_1$, то окружности касаются изнутри.
5. Если $d < R - R_1$, то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.



УГЛЫ И ОКРУЖНОСТЬ



- Центральный угол
- Вписанный угол
- ТЕСТ



ВПИСАННЫЙ УГОЛ



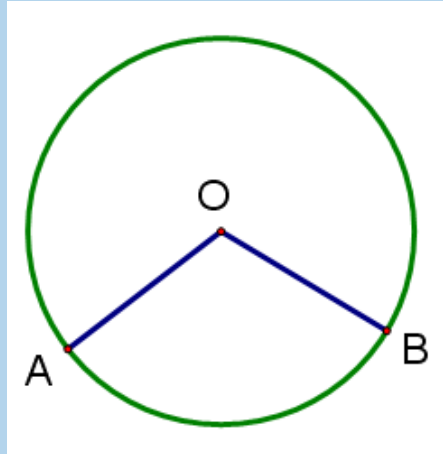
ТИАМЕ

- Определение
- ТЕОРЕМА о вписанном угле
- Свойства вписанных углов
- Угол между хордами
- Угол между двумя секущими
- Описанный угол
- Угол между хордой и касательной
- Угол между касательной и секущей



Центральный угол

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.



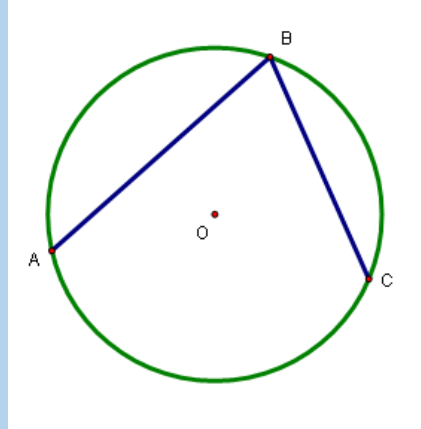
$\angle AOB$ - центральный
угол



Вписанный угол

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

$\angle ABC$ -
вписанный угол

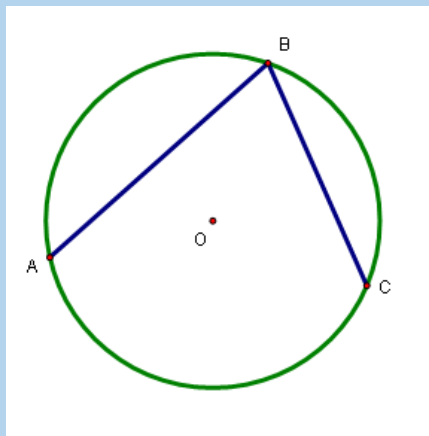




TIAME

Теорема о вписанном угле

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.



$\angle ABC$ -
вписанный угол

AC - дуга
окружности

Доказательство

[1 случай](#)

[2 случай](#)

[3 случай](#)



TIAME

Дано: окружность с центром O , $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда сторона BC проходит через центр O

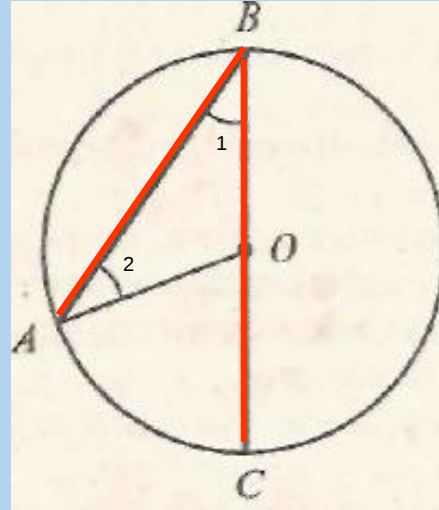
1. Дуга AC меньше полуокружности, $\angle AOC = \angle AOC$ (центральный)

2. Рассмотрим $\triangle ABO$, $AO = OB$ (радиусы). $\triangle ABO$ равнобедренный

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle AOC$ – внешний угол $\triangle ABO$,

$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1$,

следовательно $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$





TIAME

Дано: окружность с центром O , $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда центр O лежит внутри вписанного угла.

1. Дополнительное построение: диаметр BD

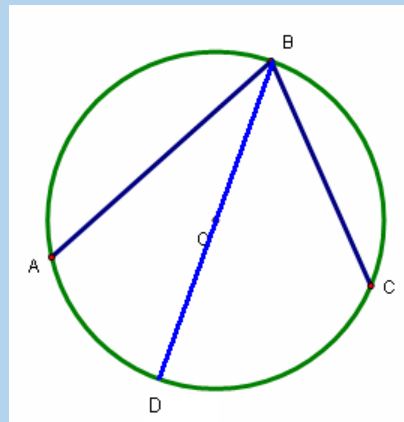
2. Луч BO делит $\angle ABC$ на два угла

3. Луч BO пересекает дугу AC в точке D

4. $\cup AC = \cup AD + \cup DC$, следовательно $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$

или

$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC$ или $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$





TIAME

Дано: окружность с центром O , $\angle ABC$ - вписанный

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$

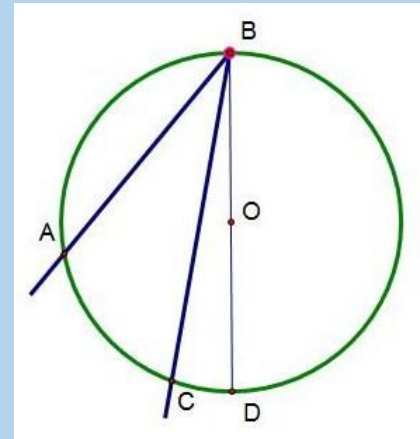
Доказательство:

Рассмотрим случай, когда центр O лежит вне вписанного угла.

1. Дополнительное построение: диаметр BD
2. Луч BO не делит $\angle ABC$ на два угла
3. Луч BO не пересекает дугу AC в точке D
4. $\cup AC = \cup AD - \cup CD$, следовательно $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$

или

$\angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup DC$ или $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$

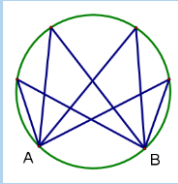




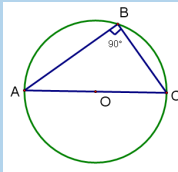
Свойства вписанных углов



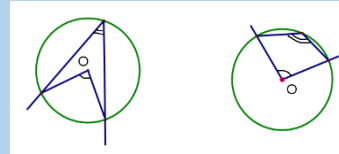
• 1



• 2



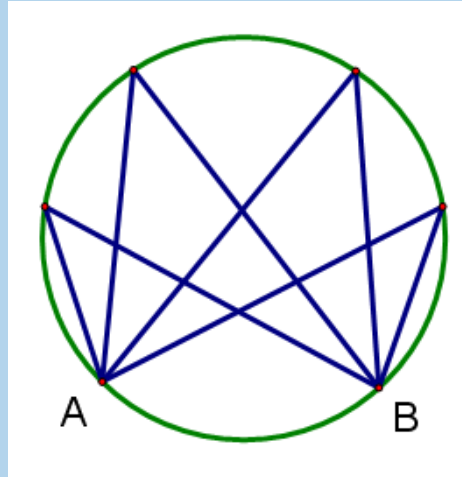
• 3





TIAME

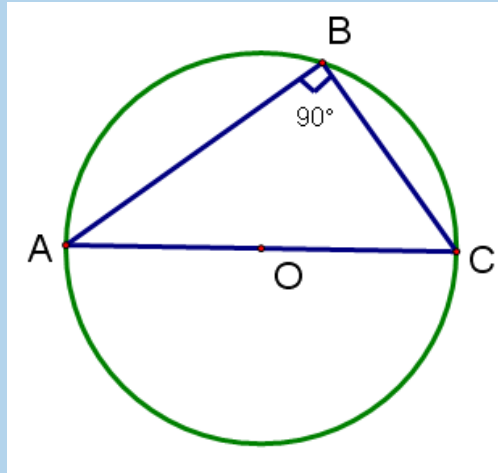
1. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой, потому что каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги.





ТИАМЕ

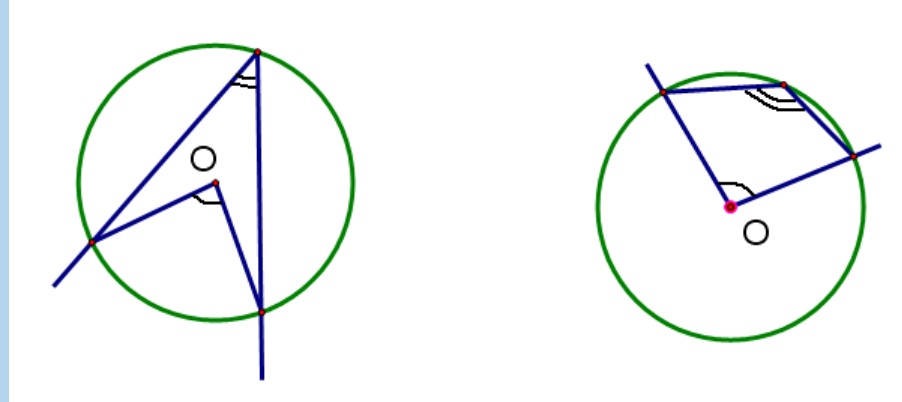
2. Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой, потому что каждый такой угол измеряется половиной полуокружности и, следовательно, содержит 90° .





TIAME

3. Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180° .

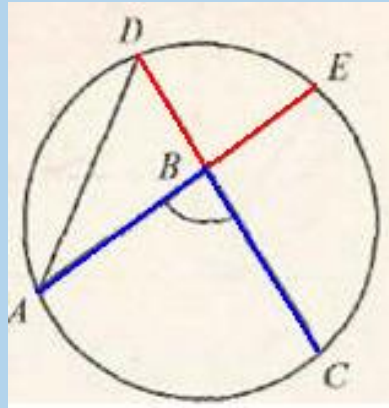




ТИАМЕ

Теорема об угле, вершина которого лежит внутри круга

Угол (ABC) , вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг $(AC$ и $DE)$, из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.

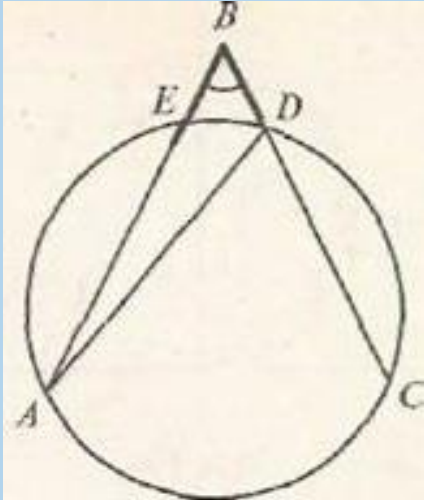




TIAME

Теорема об угле, вершина которого лежит вне круга (угол между секущими)

Угол ABC , вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг AC и ED , заключенных между его сторонами.



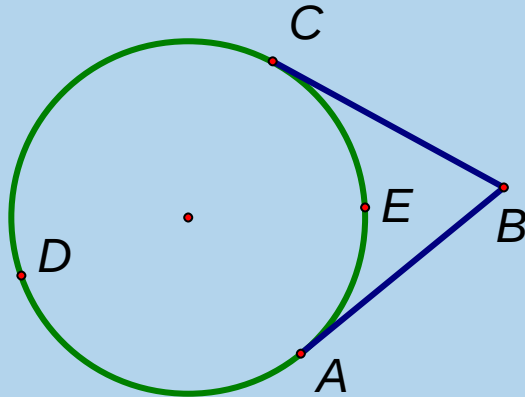
$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup ED)$$



ТИАМЕ

Описанный угол (угол между двумя касательными)

равен полуразности образованных им дуг.



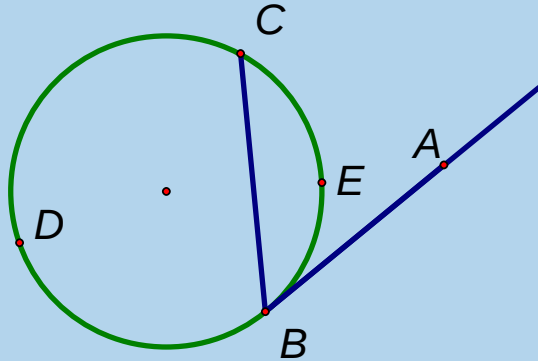
$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup ADC - \cup AEC)$$



ТИАМЕ

Угол между хордой и касательной

равен половине дуги, заключенной внутри него.



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BEC$$

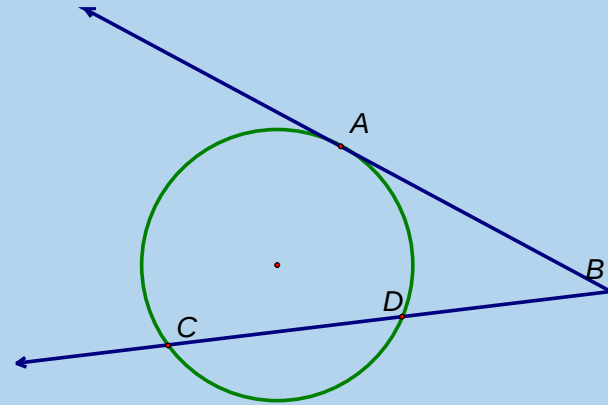


Угол между касательной и секущей



ТИАМЕ

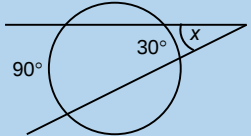
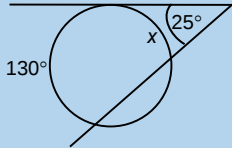
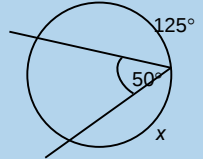
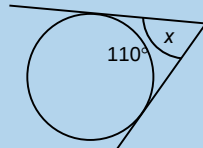
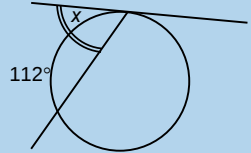
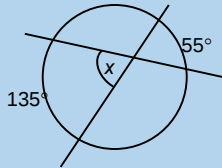
равен полуразности образованных отсекаемых дуг, прилежащих к касательной.



$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AC - \cup AD)$$

ТЕСТ

Найти x по данным чертежам и выбрать нужную величину

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

а) 80° б) 70° в) 135° г) 95° д) 30° е) 56°





1	Д
2	а
3	в
4	б
5	е
6	г



ТИАМЕ

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

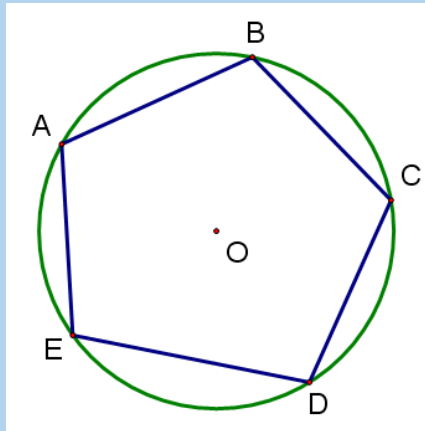
- [Окружность, описанная около многоугольника](#)
- [Окружность, описанная около треугольника](#)
- [Окружность, вписанная в треугольник](#)



ТИАМЕ

Окружность, описанная около многоугольника

Окружность описана около многоугольника,
если она проходит через все его вершины.





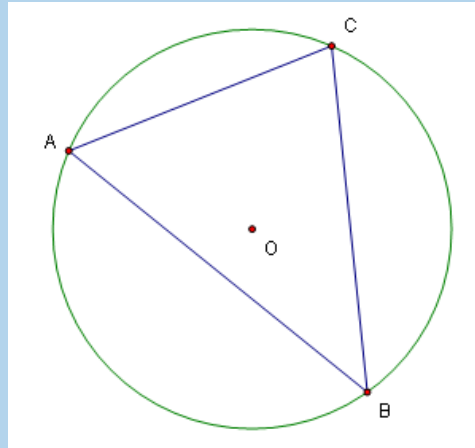
Окружность, описанная около треугольника



ТИАМЕ

ТЕОРЕМА

Около каждого треугольника можно описать окружность.



[Доказательство](#)

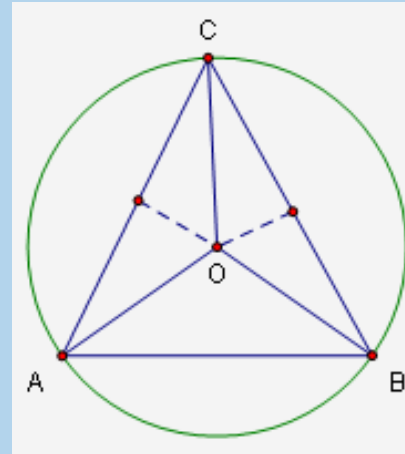


ТИАМЕ

Доказательство.

1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведем отрезки OA , OB и OC .

2. Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC , то $OA = OB = OC$, Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC .



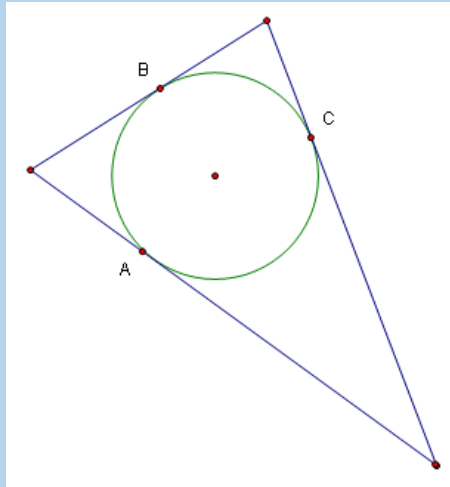


TIAME

Окружность, вписанная в треугольник

ТЕОРЕМА

В каждый треугольник можно вписать окружность.

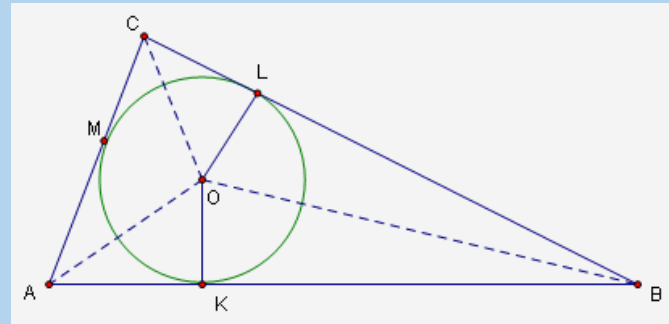


[Доказательство](#)



Доказательство.

1. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис.
2. Проведем из точки O перпендикуляры OK , OL и OM соответственно к сторонам AB , BC и CA .
3. Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC , то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K , L и M .
4. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K , L , M , так как они перпендикулярны к радиусам OK , OL и OM . Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC .





ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ



TIAME

- Длины
- Площади

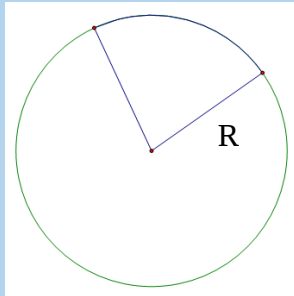


Длины



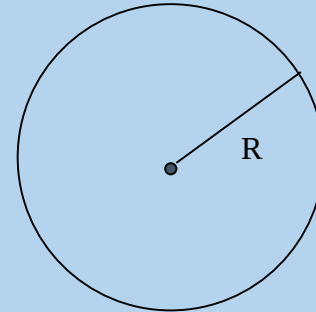
Длина дуги окружности ℓ
радиуса R с центральным углом α

$$\ell = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$



Длина окружности C радиуса R

$$C = 2\pi R$$





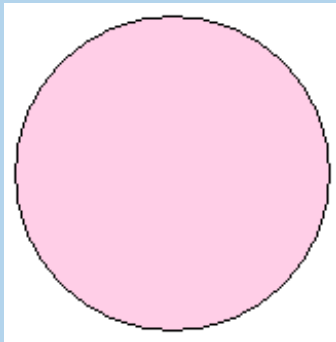
Площади



TIAME

Площадь S круга радиуса R

$$S = \pi R^2$$



Площадь S сектора радиуса R
с центральным углом в α

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

