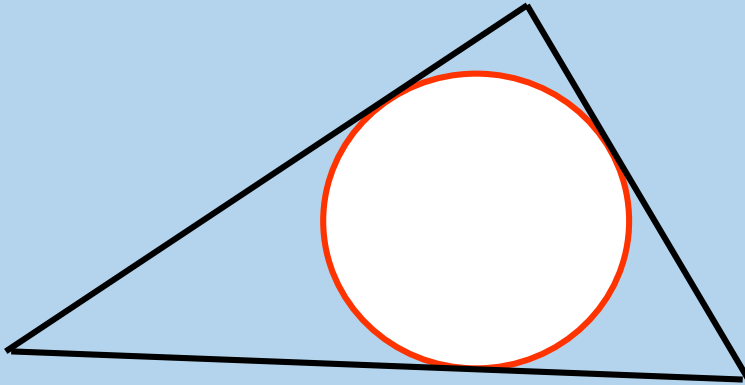




Треугольник и окружность



Преподаватель: Каландарова Г.И



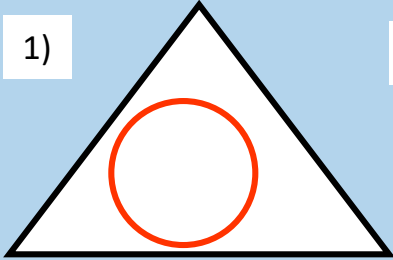
Определение: **окружность называется вписанной в треугольник,**
если все стороны треугольника касаются
окружности.



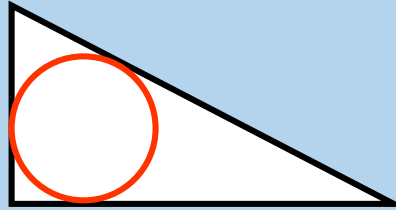
TIAME

На каком рисунке окружность вписана в треугольник:

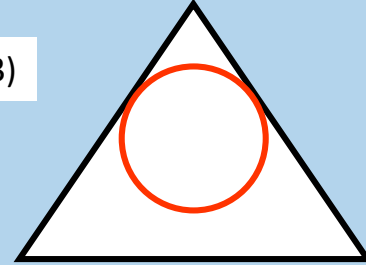
1)



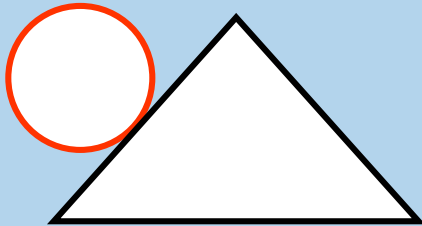
2)



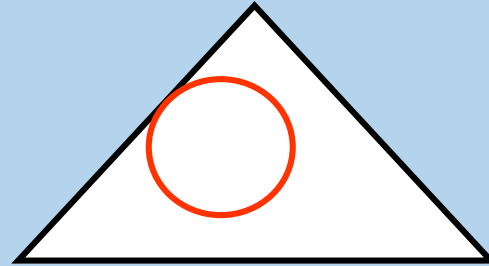
3)



4)



5)



**Если окружность вписана в треугольник,
то треугольник описан около окружности.**

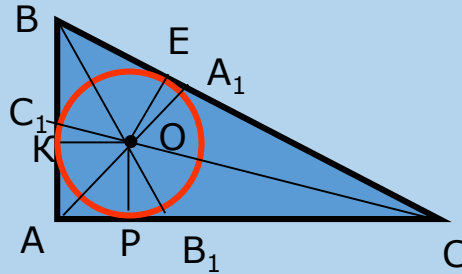


Теорема. **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**

Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.



ТИАМЕ



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O;r),
вписанная в треугольник

Доказательство:

Проведём биссектрисы треугольника: AA_1 , BB_1 , CC_1 .
По свойству (замечательная точка треугольника)
биссектрисы пересекаются в одной точке – O,
и эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, т. е. :

$OK = OE = OP$, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$, значит,
O – центр окружности, а AB, BC, AC – касательные к ней.

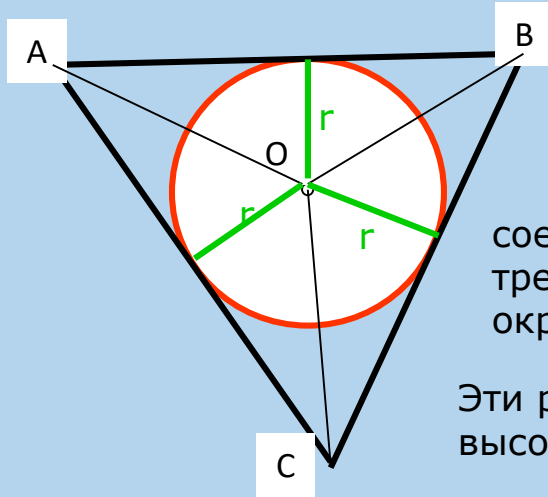
Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.



TIAME

Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$,
 $p = \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$ – полупериметр.



Доказать: $S_{ABC} = p \cdot r$

Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются
высотами треугольников AOB, BOC, COA.

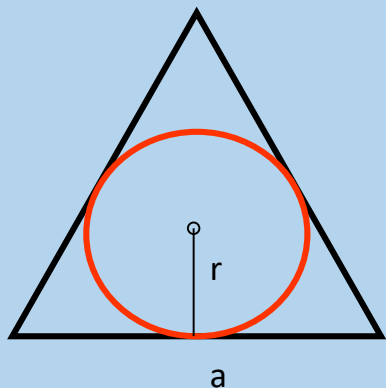
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2} p \cdot r. \end{aligned}$$



Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



TIAME



Решение:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

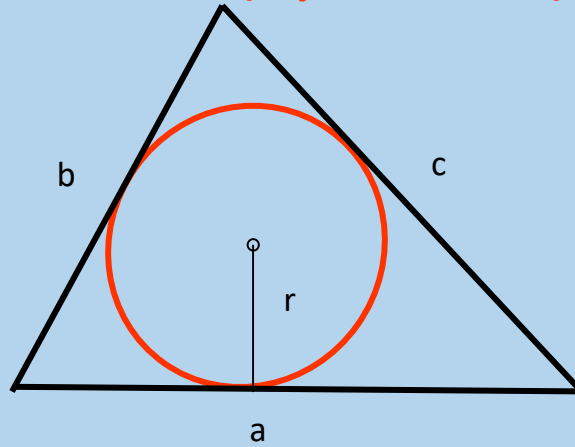
$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$



Вывод формулы для радиуса вписанной в треугольник окружности



TIAME



$$S = p \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r = \frac{1}{2} (a + b + c) \cdot r$$

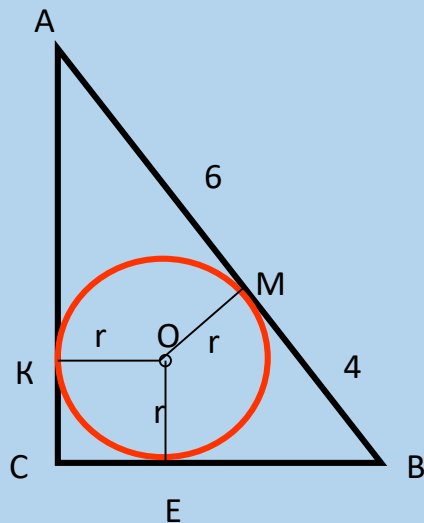
$$2S = (a + b + c) \cdot r$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$



TIAME

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$
Окр.(O;r) вписана,
 $AM = 6$ см, $BM = 4$ см
Найти: r.

Решение:

$$AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(\text{см})$$

Т. к. Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$, то
AB, AC, BC – касательные и по свойству
касательных, проведённых из одной точки:
 $AM = AK = 6$ см, $BE = BM = 4$ см, $CK = CE$

Т. к. $\angle C = 90^\circ$, то CKOE – квадрат, поэтому $CK = CE = r$,

$$AC = 6 + r, BC = 4 + r$$

По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$$

Решив квадратное уравнение, получим $r = 2$ см

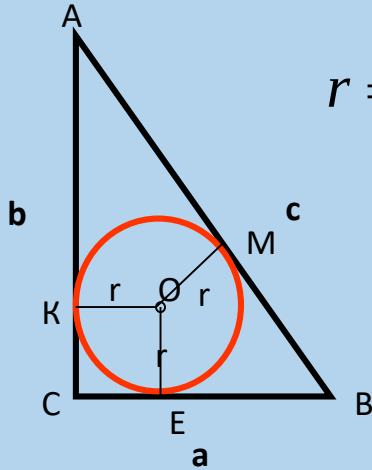
Ответ: 2 см



Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



TIAME



$$r = \frac{a + b - c}{2}; a, b - \text{катеты, } c - \text{гипотенуза}$$

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

AB = AM + BM

c = b - r + a - r

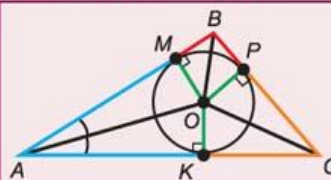
2r = a + b - c

$r = \frac{1}{2} (a + b - c)$

3

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



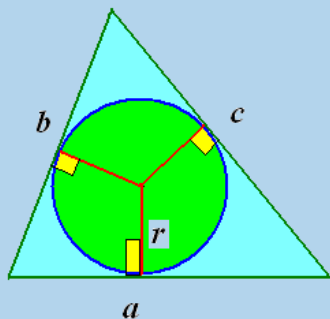
AB, BC, AC – касательные
 Отрезки касательных равны:
 $AM = AK, BM = BP, CP = CK$
 $OM = OK = OP = r$
 AO, BO, CO – биссектрисы углов

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

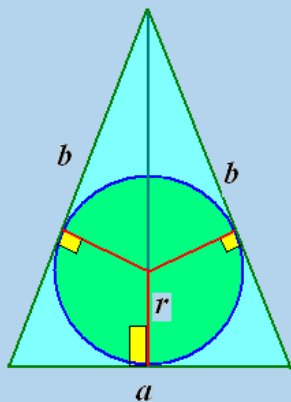


ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ



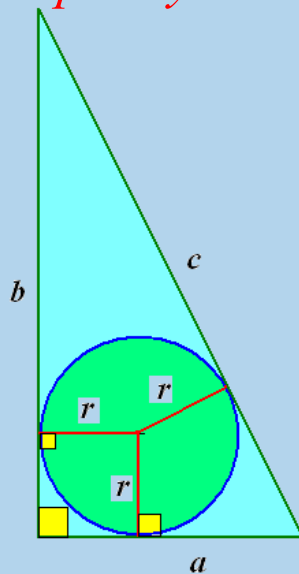


$$S = p \cdot r, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$



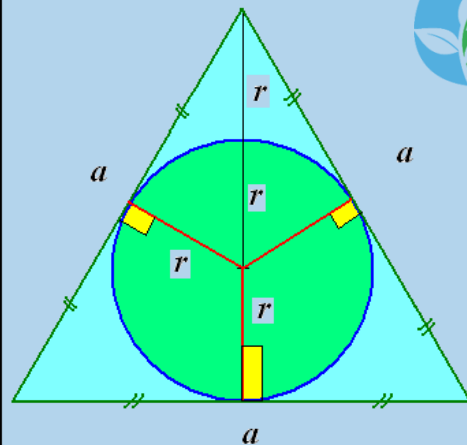
$$r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$$

прямоугольный



$$r = p - c, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

правильный



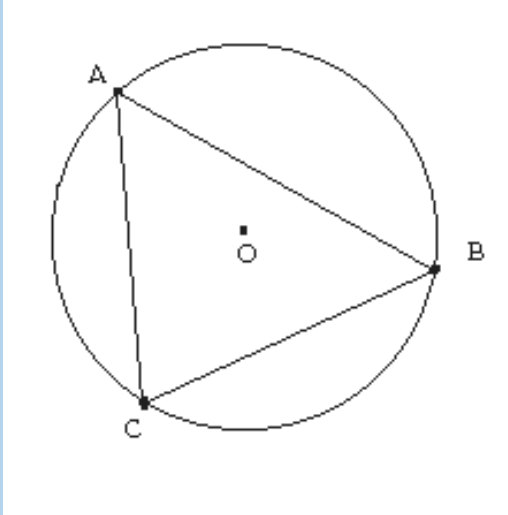
$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$$



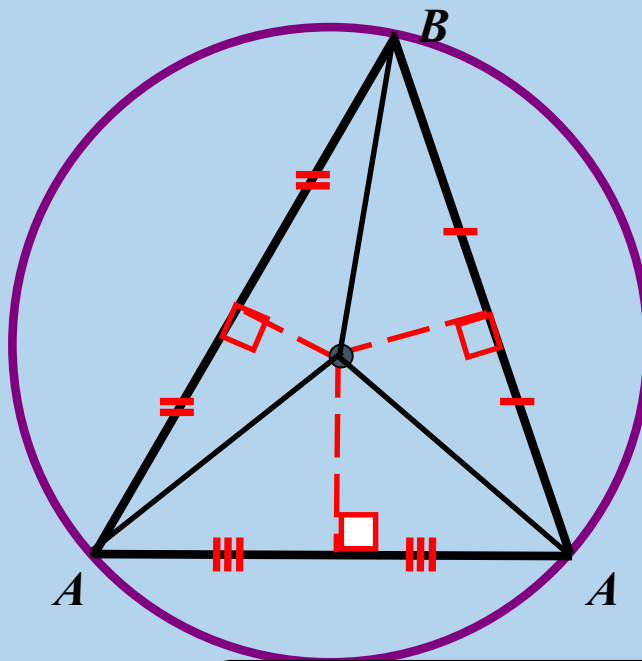
TIAME



Описанная окружность.



- Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.
- Стороны вписанного треугольника являются хордами описанной около него окружности.
- Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?



**Центром описанной около
треугольника окружности является
точка пересечения серединных
перпендикуляров треугольника.**

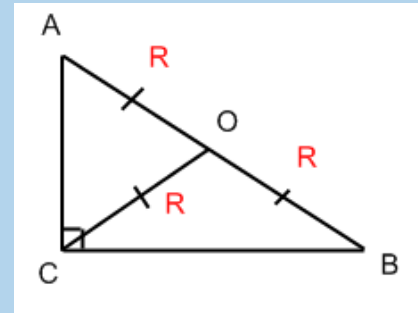
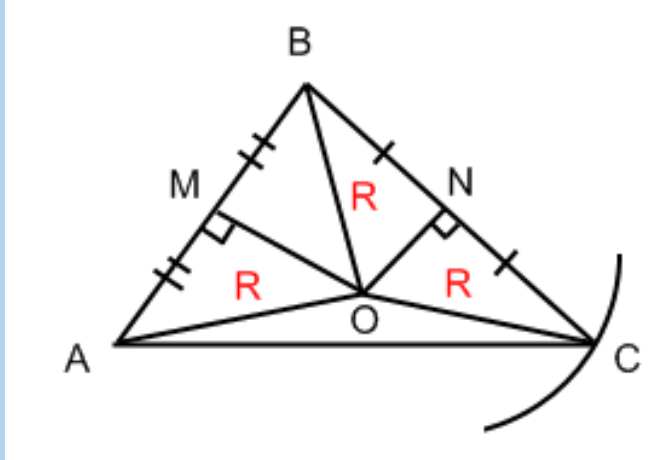


Треугольник. Описанная окружность.



TIAME

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.
- 3) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.



$$R = \frac{1}{2} AB$$



Треугольник. Описанная окружность



TIAME

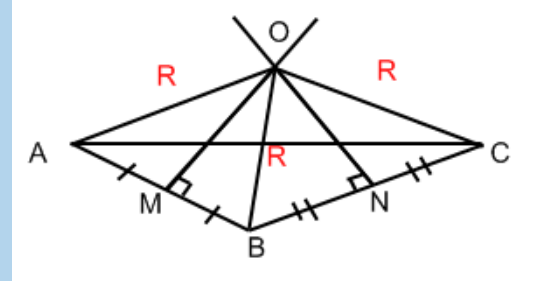
- 4) R – радиус описанной окружности
 $R=OA=OB=OC$ в любом треугольнике.

- 5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

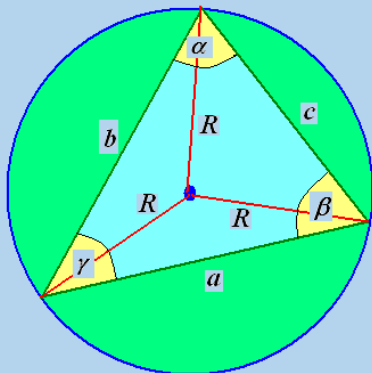
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad - \text{ для правильного треугольника}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$



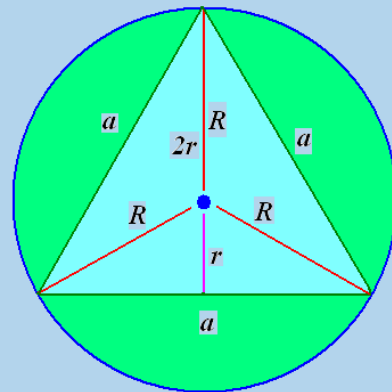
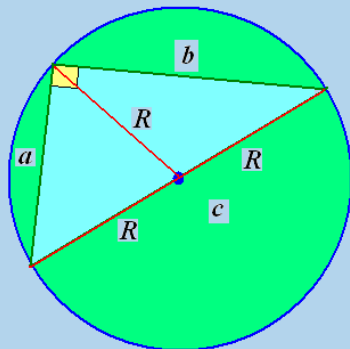
прямоугольный



$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$S_{\square} = \frac{abc}{4R}$$

правильный

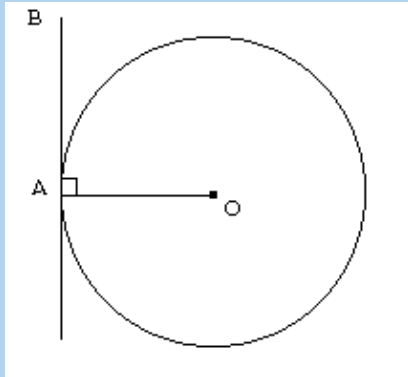


$$R = 2r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

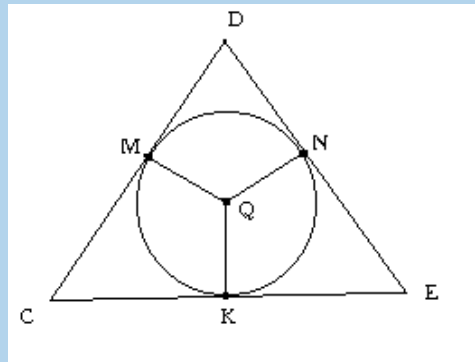


TIAME

Касательная к окружности



- Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности. Общая точка окружности и касательной называется точкой касания.



- Что можно сказать о сторонах треугольника CDE по отношению к окружности?



- Если радиусы описанной около треугольника и вписанного в треугольник окружностей равны R и r , то расстояния d между центрами окружностей равно

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

- В равнобедренном треугольнике с основанием a и высотой h :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (h - R)^2 = R^2$$



ТИАМЕ

В равнобедренном треугольнике с основанием, равным a , с боковыми сторонами, равными b , с высотой, опущенной к основанию, равной h , и с углами при основании, равными α :

a) $r = \frac{1}{2}a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$

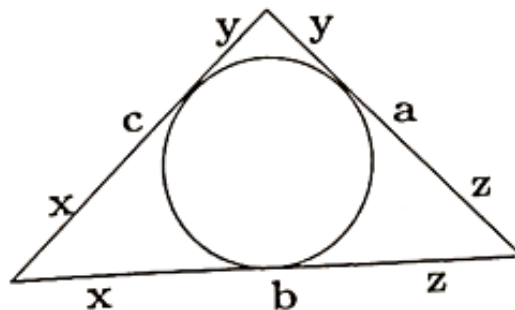
b) $r = \frac{ah}{2b + a}.$

Для любого треугольника верны следующие соотношения:

$$x = \frac{b + c - a}{2}.$$

$$y = \frac{a + c - b}{2}.$$

$$z = \frac{a + b - c}{2}.$$



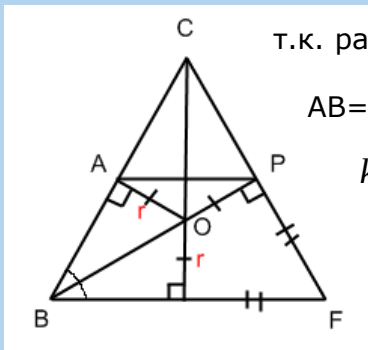


- Центр описанной около остроугольного треугольника окружности лежит внутри треугольника.
- Центр описанной прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.
- Центр описанной около тупоугольного треугольника окружности лежит вне треугольника.

Задачи!

Основание равнобедренного треугольника равно 36 см. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках A и P, AP=12 см. Найти: периметр треугольника.

Решение: O – центр вписанной окружности. CH – высота, биссектриса и медиана,



т.к. равнобедренный $\triangle BCF$, $HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$, $AP \parallel BF$ т.к.

$AB = PF$. Значит $\triangle ACP \sim \triangle ACF$, $\triangle ACP$ – равнобедренный.

$k = \frac{AP}{BF} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Т.к. O – центр описанной окружности, то

$HF = PF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$. $\frac{CP}{CF} = \frac{AP}{HF} = \frac{1}{3}$, тогда $\frac{CP}{CP+18} = \frac{1}{3}$,

$3CP = CP + 18$, значит $CP = 9$. $CF = 9 + 18 = 27$.

$P_{BCF} = 2CF + BF = 2 \cdot 27 + 36 = 54 + 36 = 90$.

Ответ. 90



Задача 2

Расстояние, от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной окружности в треугольник, равно $2\sqrt{2}$ $S_{\Delta}=30$ Найти: длину гипотенузы.

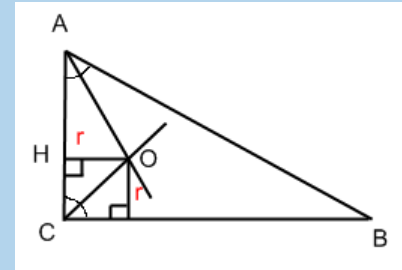
Решение: P – полупериметр.

O – точка пересечения биссектрис.

$$\angle HCO = 45^{\circ}, \quad OH = r, \quad CO = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Тогда } r = CO \sin 45^{\circ} = 2. \quad P = \frac{S_{\Delta}}{r} = 15$$

$$C = P - r = 13.$$



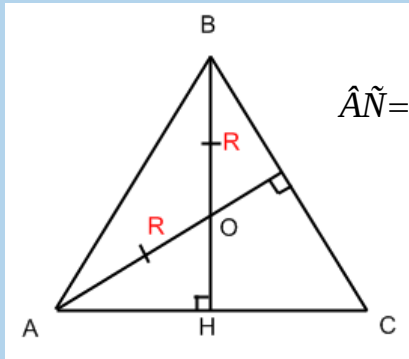
Ответ. 13



Задача 3

В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение: $BH=AC=4$. R – радиус описанной окружности. $R=\frac{a \cdot b \cdot c}{4S_{\Delta}}$, $HC=\frac{1}{2}AC=2$,



$$AO = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \quad AB = BC = 2\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8. \quad R = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4}{4 \cdot 8} = 2,5$$

Ответ. 2,5