Agzamxodjaeva M.Sh

I kurs. GEOMETRIYA

12-Mavzu: **YUZ HAQIDA TUSHUNCHA. TO`G`RI TO`RTBUCHAKNING YUZI. PARALLELOGRAMNING YUZI.**

YUZ HAQIDA TUSHUNCHA.

TIIAME

1. Yuz haqida tushuncha. Shakllarning yuzlarini aniqlash masalasi juda qadim zamonlarga borib taqaladi. Bu masalaning vujudga kelishini insonlarning amaliy faoliyati taqozo etgan. Har birimiz kundalik turmushimizda yuz haqida birmuncha tasavvurga egamiz. Masalan, Siz to‘g‘ri to‘rtburchak (aytaylik, o‘zingiz yashayotgan xona) va kvadratning yuzini topishni bilasiz. Biz endi shaklning yuzi to‘g‘risidagi tushunchalarni aniqlash va uni o‘lchash usullarini topish bilan shug‘ullanamiz.

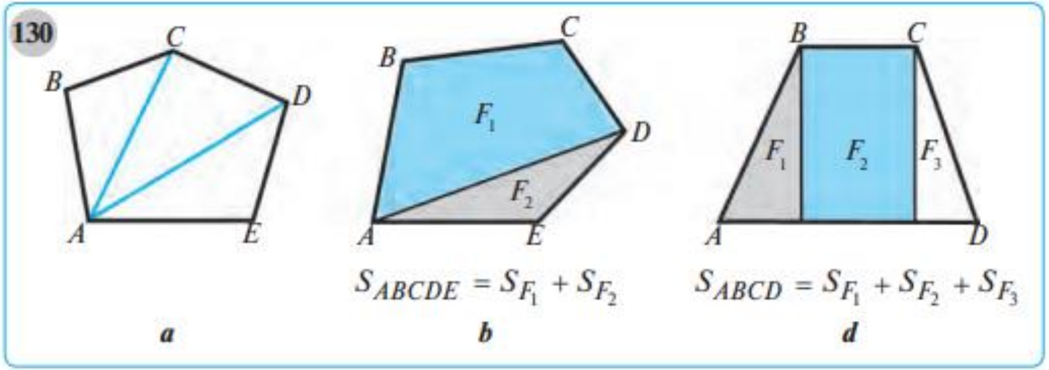
Agar geometrik shaklni chekli sondagi uchburchaklarga bo‘lish mumkin bo‘lsa, bu shakl *sodda shakl* deyiladi.

Biz uchburchak deb, tekislikning uchburchak bilan chegaralangan chekli qismini aytamiz. Qavariq ko‘pburchak sodda shaklga misol bo‘ladi. Bu ko‘pburchak o‘zining biror uchidan chiqqan diagonallari bilan uchburchaklarga bo‘linadi (130-*a* rasm).

Yuz — bu musbat miqdor (kattalik) bo‘lib, uning son qiymati quyidagi asosiy xossalarga (aksiomalarga) ega:

1-xossa. *Teng shakllar teng yuzlarga ega.*

2-xossa. *Agar ko‘pburchak bir-birini qoplamaydigan ko‘pburchaklardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda uning yuzi bu ko‘pburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.*



F ko‘pburchak bir-birini qoplamaydigan ko‘pburchaklardan tashkil topgan degani: 1) *F* bu ko‘pburchaklar yig‘indisidan iborat va 2) bu ko‘pburchaklardan hech qaysi ikkitasi umumiy ichki nuqtalarga ega emas. Masalan, 130-*b*, *d* rasmda bir-birini qoplamaydigan ko‘pburchaklardan tuzilgan ko‘pburchaklar tasvirlangan.

2. Tengdosh shakllar.

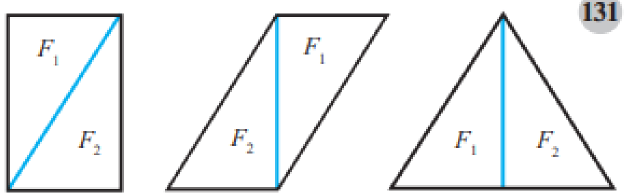
Ta'rif. *Agar ikki ko'pburchakdan birini bir necha qismga bo'lib, bu qismlarni boshqacha joylashtirganda ikkinchi ko'pburchak hosil bo'lsa, bu ko'pburchaklar* ***teng tuzilganlar*** *deyiladi* (131- rasm).

Agar ikkita ko'pburchakning yuzlari teng bo'lsa, ular *tengdosh ko'pburchaklar* deb ataladi. 131- rasmdagi ko'pburchaklar tengdoshdir.

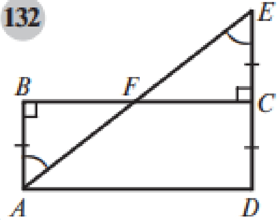
Teng ko'pburchaklar tengdoshdir (1- xossa), ammo teskari tasdiq, umuman aytganda, to'g'ri bo'lmaydi: agar ikki shakl tengdosh bo'lsa, bundan ularning tengligi kelib chiqmaydi.

Masala. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak DC tomonning davomida C uchiga nisbatan D nuqtaga simmetrik E nuqta belgilangan (132- rasm). ADE uchburchak yuzining $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak yuziga teng ekanini isbotlang.

Isbot. AE va BC tomonlar F nuqtada kesishsin. ABF va ECF uchburchaklar teng (kateti va o'tkir burchagiga ko'ra: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$). Natijada ADE uchburchak $AFCD$ trapetsiya bilan ECF uchburchakdan, $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak esa o'sha $AFCD$ trapetsiya bilan ECF ga teng bo'lgan ABF uchburchakdan tuzilgan, demak, ADE uchburchak bilan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak teng tuzilgandir (ya'ni tengdoshdir). Shuni isbotlash talab qilingan edi.



131

132


TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKNING YUZI

Teorema.

Tomonlari a va b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

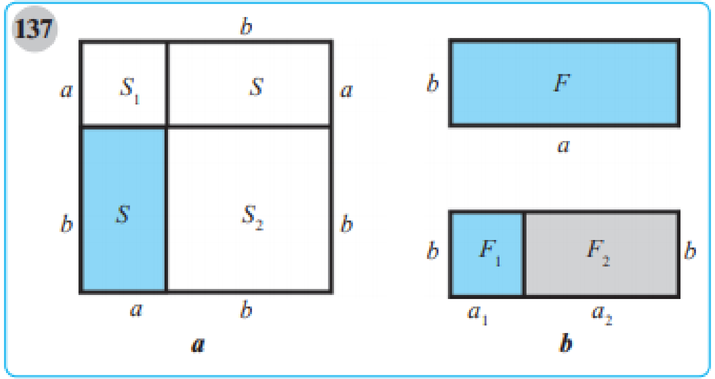
$$S = a \cdot b$$

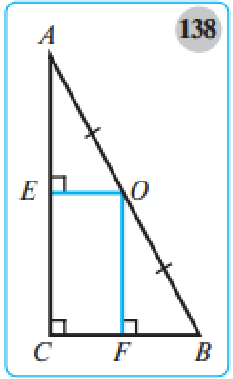
formula bo‘yicha hisoblanadi.

Isbot. Tomonlari a va b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni olaylik, bunda a va b – ixtiyoriy musbat sonlar. $S = a \cdot b$ ekanini isbotlaymiz.

Teoremani isbot qilish uchun tomoni $(a + b)$ bo‘lgan kvadrat yasaymiz. Bu kvadratni 137-*a* rasmda ko‘rsatilgan shakldagidek bo‘laklarga ajratamiz. Bunda kvadratning yuzi tomoni a va b ga teng ikki kvadrat hamda tomonlari a va b bo‘lgan ikki to‘g‘ri to‘rtburchakdan tashkil topganini ko‘rish mumkin.

To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning qo‘shni tomonlarining ko‘paytmasiga teng.





Demak, tomoni $(a+b)$ bo'lgan kvadrat yuzi S_1+2S+S_2 ga teng. Ikkinchi tomondan yuza haqidagi xossaga ko'ra, bu yuza $(a+b)^2$ ga teng, ya'ni

$$S_1+2S+S_2=(a+b)^2 \quad \text{yoki} \quad S_1+2S+S_2=a^2+2ab+b^2.$$

Bu tenglikda $S_1=a^2$, $S_2=b^2$ ekanini hisobga olsak,

$$S=a\cdot b$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

$S_F=a\cdot b$ tenglikning isboti haqida.

ab son haqiqatan ham, yuza haqidagi xossalarni (aksiomalarni) qanoatlantiradi. Buni isbotlaymiz. 1- va 3- xossalarning bajarilishi ravshan, ya'ni teng to'g'ri to'rtburchaklar teng yuzga ega. Endi 2- xossa bajarilishini ko'rsatamiz.

Tomonlari a va b bo'lgan F to'g'ri to'rtburchakni tomonlari a_1 va b hamda a_2 va b bo'lgan F_1 va F_2 to'g'ri to'rtburchaklarga ajratamiz (137-*b* rasm). U holda $S_{F_1}=a_1b$, $S_{F_2}=a_2b$ va $S_F=ab$ bo'ladi. Bundan tashqari, $a_1+a_2=a$. Shuning uchun $S_{F_1}+S_{F_2}=a_1b+a_2b=(a_1+a_2)b=ab=S_F$.

Shunday qilib, to'g'ri to'rtburchak uchun *ab* miqdor yuzning hamma xossalariga ega, ya'ni to'g'ri to'rtburchakning yuzi bo'ladi.

1- masala. To'g'ri to'rtburchakning yuzi 150 sm^2 ga teng, tomonlarining nisbati esa 3 : 2 kabi. Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

Yechilishi. To'g'ri to'rtburchakning kichik tomoni $b = 2x$ sm bo'lsin. U holda katta tomonning uzunligi $a = 3x$ sm ga teng bo'ladi. To'g'ri to'rtburchakning yuzini hisoblash formulasidan foydalanib tenglama tuzamiz va uni yechamiz:

$S = 3x \cdot 2x$, ya'ni $S = 6x^2$. Bundan $x^2 = S : 6$, $x^2 = 150 : 6$, $x^2 = 25$, $x = 5$ (sm).

Va demak, to'g'ri to'rtburchakning kichik tomoni: $b = 2 \cdot 5 = 10$ (sm) ga, katta tomoni esa $a = 3 \cdot 5 = 15$ (sm) ga teng. Endi uning perimetrini hisoblaymiz:

$$P = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (15 + 10) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (sm)}.$$

Javob: $P = 50$ sm.

To'g'ri to'rtburchakning yuzini hisoblashda tomonlar bir xil uzunlik birligida ifodalangan bo'lishi shart!

PARALLELOGRAMMNING YUZI

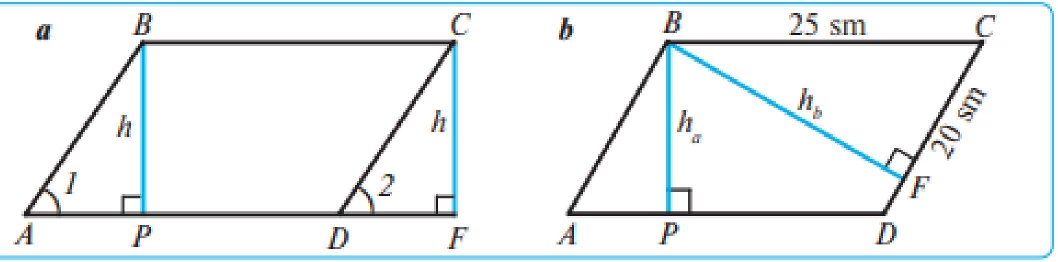
Parallelogrammning istalgan tomonini uning *asosi* deb olish mumkin, u holda shu tomonning ixtiyoriy nuqtasidan qarama-qarshi tomongacha bo‘lgan masofa uning *balandligi* bo‘ladi. Balandlik tomonga yoki tomonning davomiga tushishi mumkin. 140- rasmda BP va CF — $ABCD$ parallelogrammning balandliklaridir.

Teorema.

Parallelogrammning yuzi asosi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng:

$$S = a \cdot h.$$

140



I s b o t. *ABCD* parallelogrammni ko'rib chiqamiz (140-*a* rasm). Bu parallelogrammning asosi qilib $AD = a$ tomonini olamiz, balandligi esa h ga teng bo'lsin.

$S = a \cdot h$ ekanini i s b o t q i l i s h t a l a b e t i l a d i.

Asosi parallelogrammning *BC* tomoniga teng, balandligi esa h dan iborat bo'lgan *PBCF* to'g'ri to'rtburchak yasaymiz. *ABP* va *DCF* uchburchaklar teng (gipotenuzasi va o'tkir burchagiga ko'ra: $AB = DC$ − gipotenuzalar, $\angle 1 = \angle 2$ − mos burchaklar). *ABCD* parallelogramm *PBCD* trapetsiya bilan *ABP* uchburchakdan, *PBCF* to'g'ri to'rtburchak esa o'sha *PBCD* trapetsiya bilan *ABP* ga teng bo'lgan *DCF* uchburchakdan tuzilgan. Demak, *ABCD* parallelogramm bilan yasalgan *PBCF* to'g'ri to'rtburchak teng tuzilgandir (ya'ni, tengdoshdir). Bundan, *ABCD* parallelogrammning yuzi *PBCF* to'g'ri to'rtburchakning yuziga, ya'ni ah teng, degan natija chiqadi.

Shunday qilib, asosi a va unga tushirilgan balandligi h bo'lgan parallelogrammning S yuzi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$S = a \cdot h.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

N a t i j a. Agar ikki parallelogramm bitta asosga ega va balandliklari teng bo'lsa, ular teng tuzilgandir.

1 - m a s a l a. Parallelogrammning tomonlari 25 sm va 20 sm, birinchi tomoniga tushirilgan balandlik esa 8 sm. Shu parallelogrammning ikkinchi tomoniga tushirilgan balandligini toping.

Y e c h i l i s h i. *ABCD* parallelogrammda: $AD = a = 25$ sm, $DC = b = 20$ sm, $h_a = 8$ sm (140-*b* rasm). $h_b = ?$

Birinchidan, $S = ah_a = 25 \cdot 8 = 200$ (sm²).

Ikkinchidan, $S = bh_b$, ya'ni $200 = 20 \cdot h_b$. Bundan $h_b = 200 : 20 = 10$ (sm).

J a v o b: 10 sm.

140