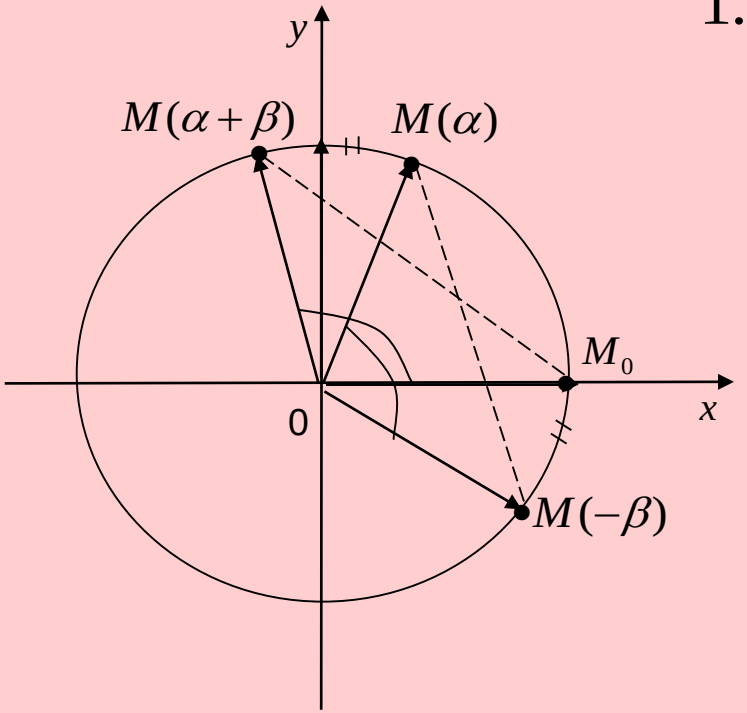
Эрматова Махбуба Мухамедовна

6-УРОК: АЛГЕБРА 2 КУРС

ТЕМА: *Формулы сложения*

Формулы сложения



1. Отметим на единичной окружности точки M_0, $M(\alpha)$, $M(-\beta)$ и $M(\alpha+\beta)$

$M_0(1;0)$

$M(\alpha)=(\cos\alpha;\sin\alpha)$

$M(-\beta)=(\cos(-\beta);\sin(-\beta))$

$M(\alpha+\beta)=(\cos(\alpha+\beta);\sin(\alpha+\beta))$

Так как $\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_{\alpha}$

из равнобедренных треугольников $M_0OM_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}OM_{\alpha}$ следует равенство отрезков $M_0M_{\alpha+\beta}$ и $M_{-\beta}M_{\alpha}$

Отсюда $(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_{\alpha})^2$

Из формулы расстояния между двумя точками и $(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_{\alpha})^2$ следует

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2$$

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha$$

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

2. В (1) формуле заменив β на $-\beta$, получаем

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin(-\beta)\sin\alpha$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2)$$

$$3.\ \sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \qquad (3)$$

$$4.\ \sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \qquad (4)$$

II. Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$5.\ tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$, т.е. в случае, когда

$tg\alpha$ и $tg\beta$ определены:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta}\qquad(5)$$

$$6.\ tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$, т.е. в случае, когда

$tg\alpha$ и $tg\beta$ определены:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\,tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\,tg\beta}\quad(6)$$

$$7.\ ctg(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\sin\alpha\sin\beta$

$sin\alpha \neq 0$ и $sin\alpha\beta \neq 0$, т.е. в случае, когда

$ctg\alpha$ и $ctg\beta$ определены:

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{ctg\alpha\,ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\,ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha} \qquad (7)$$

$$8.\ ctg(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

Поделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\sin\alpha\sin\beta$

$sin\alpha \neq 0$ и $sin\alpha\beta \neq 0$, т.е. в случае, когда

$ctg\alpha$ и $ctg\beta$ определены:

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{ctg\alpha\,ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\,ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha} \qquad (8)$$

II. Формулы сложения

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta},$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$