Эрматова Махбуба Мухамедовна

9-УРОК: АЛГЕБРА 2 КУРС

Тема: *Формулы двойного и половинного аргументов Преобразование тригонометрических функций через тангенс половинного угла*

Формулы двойных углов

Чтобы вывести формулы для вычисления тригонометрических функций двойного аргумента, подставим $\beta = \alpha$ в формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta,$$
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta},$$
$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg 2\alpha = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\alpha - 1}{ctg\alpha + ctg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Формулы двойных углов sinα и cosα

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$$

Формулы двойных углов $tg\alpha$ и $ctg\alpha$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha^{\backslash : \cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\cos\alpha\neq 0}{=} \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha^{\backslash : \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=} \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha^{\backslash : \cos^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\cos\alpha\neq 0}{=} \frac{1 - tg^2\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha^{\backslash : \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \underset{\sin\alpha\neq 0}{=} \frac{ctg^2\alpha - 1}{1 + ctg^2\alpha}$$

Формулы двойных углов

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2ctg\alpha}{ctg^2\alpha + 1}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{ctg^2\alpha + 1}$$

Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha =$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

.

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha}^{\backslash : \cos^3\alpha} \underset{\cos\alpha \neq 0}{=} \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$ctg3\alpha = \frac{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha}{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}^{\backslash : \sin^3\alpha} \underset{\sin\alpha \neq 0}{=}$$

$$= \frac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1} = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$$

Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

$$ctg 3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^2\alpha}$$

Формулы половинных углов

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}^{\backslash\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha/2\cdot\cos\alpha/2}{2\cos^2\alpha/2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha/2}{\cos^2\alpha/2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

;

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha/2}{\sin\alpha/2}^{\backslash\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha/2\cdot\cos\alpha/2}{2\sin^2\alpha/2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\alpha/2}{\sin^2\alpha/2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Формулы половинных углов

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$