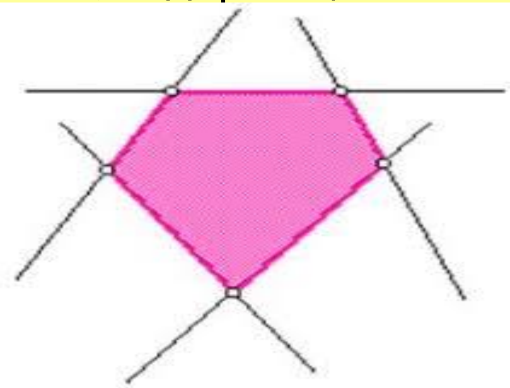
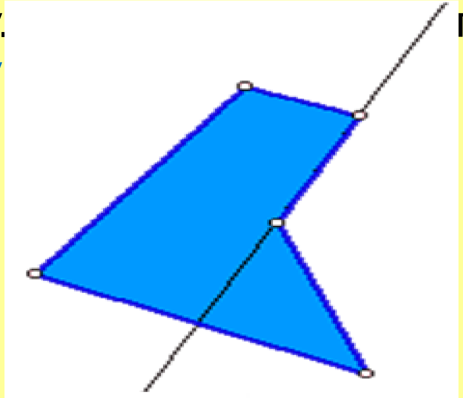
Построение многоугольников
Окружности
Нестандартные построения

Многоугольники

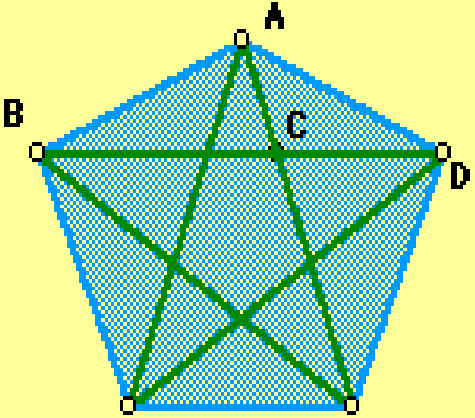
Многоугольник- это фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек.

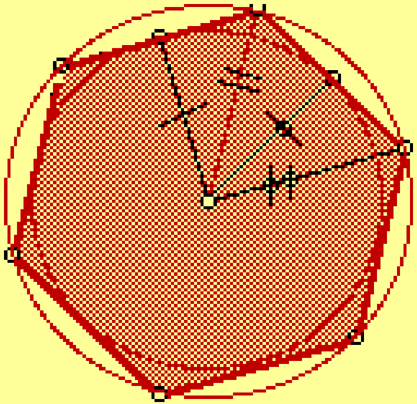
Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону. гольник **F1** **выпуклы** **евыпу**





Многоугольник называется **невыпуклым**, если прямая, содержащая сторону многоугольника разбивает его на две части.

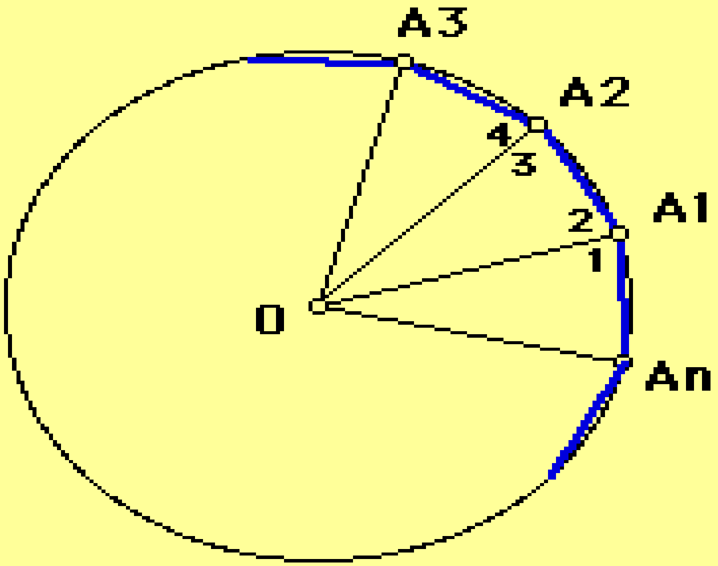




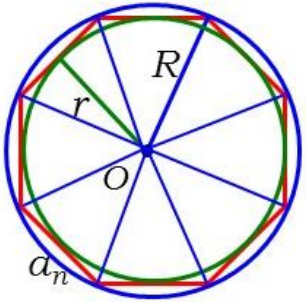
Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну, и также в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Центры описанной около правильного многоугольника и вписанной в него окружностей совпадают. Радиус описанного круга -**это радиус правильного многоугольника.**

Центр правильного многоугольника равноудален от всех его сторон и от всех вершин, поэтому он служит одновременно центром вписанной и описанной окружностей многоугольника

Теорема. *Многоугольник, вписанный в окружность, является выпуклым. Если все стороны вписанного многоугольника равны, то он является правильным.*



Основные формулы многоугольников



S – площадь правильного n – угольника

a_n – сторона правильного n – угольника

P – периметр правильного n – угольника

r – радиус вписанной окружности

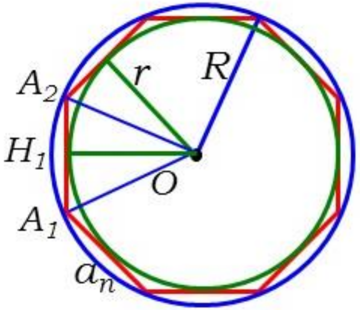
R – радиус описанной окружности

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_n \cdot r$$

$$S = n \cdot \frac{1}{2} a_n \cdot r = \frac{1}{2}(n a_n) \cdot r = \frac{1}{2} P \cdot r$$

Основные формулы многоугольников



S – площадь правильного n – угольника

a_n – сторона правильного n – угольника

P – периметр правильного n – угольника

r – радиус вписанной окружности

R – радиус описанной окружности

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \qquad r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\cdot 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$$

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Основные формулы многоугольников

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

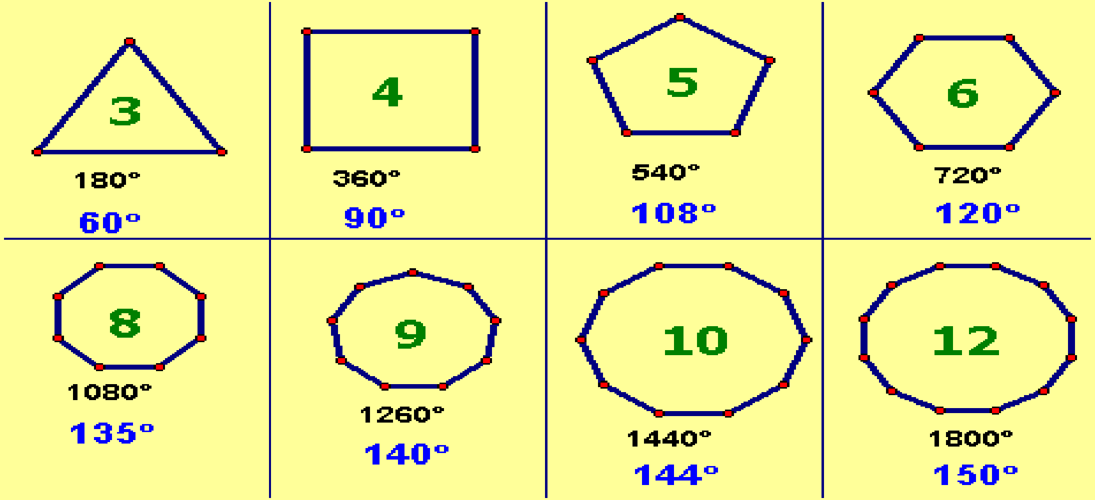
$$a_4 = 2R\sin\frac{180^\circ}{4} = 2R\sin 45^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R$$

Построение правильного многоугольника по его стороне (с использованием поворота)

Сумма углов выпуклого ***n***-угольника равна

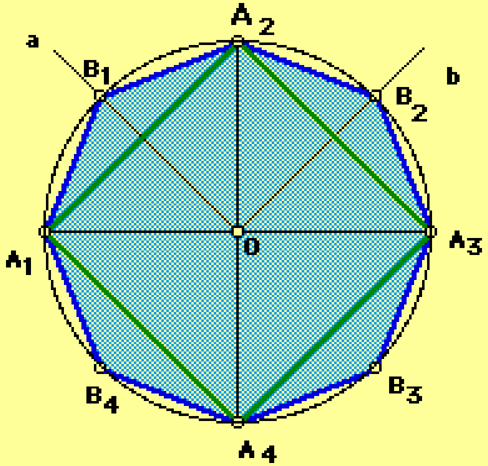
180°(*n* - 2).



Зная величину внутреннего угла правильного многоугольника, построить сам многоугольник не составит труда

1. Построим две точки - две соседние вершины многоугольника.
2. Одну из точек отметим как центр поворота, выделим вторую точку и повернём её на внутренний угол. В результате будет построена третья вершина многоугольника.
3. Только что построенную точку отметим в качестве центра поворота и повернём на внутренний угол соседнюю вершину (бывший центр). Будет построена четвёртая вершина.
4. Третий шаг будем повторять до тех пор, пока не будут построены все вершины многоугольника.
5. Последовательно соединить вершины многоугольника отрезками.

Любой ли правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки ?



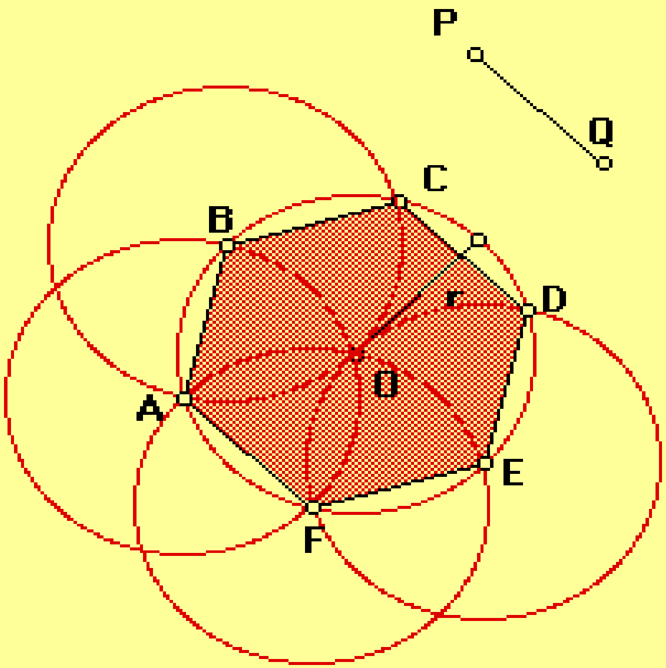
Если построен какой-нибудь правильный n-угольник, то с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 2n-угольник.

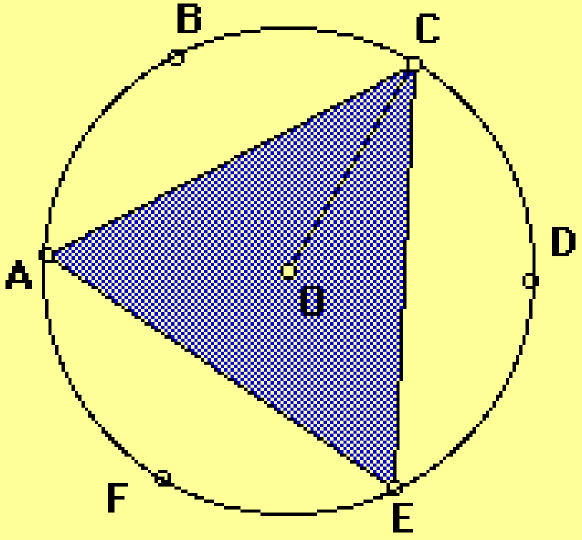
По правильному четырёхугольнику A1A2A3A4 построен правильный восьмиугольник A1B1A2…B4. Если мы можем построить циркулем и линейкой правильный n-угольник, где n - натуральное число, то можно построить правильные 2n-угольник, 4n-угольник и, вообще,

$(2^{k}*n)$-угольник, где k - любое натуральное число.

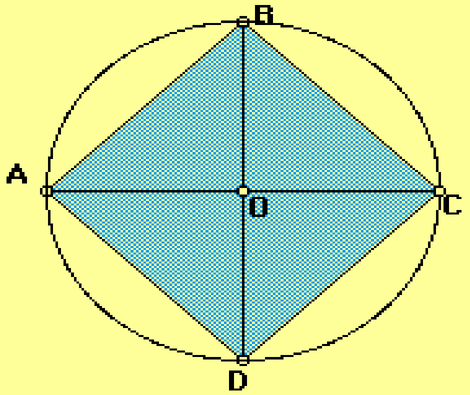
Построение правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки

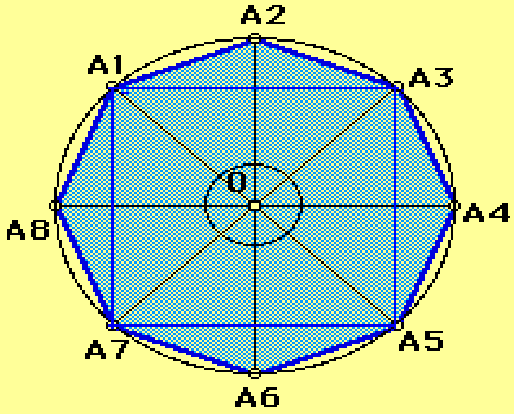
Задача №1. Построение правильного шестиугольника и треугольника





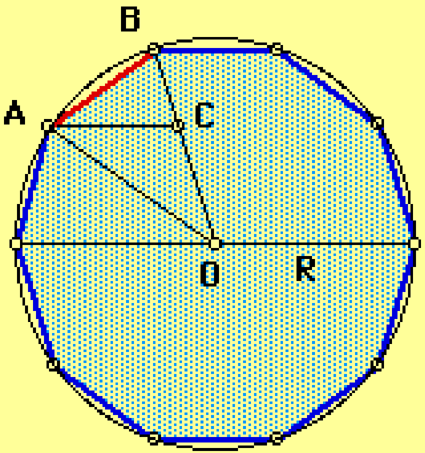
Задача №2. Построение правильного четырехугольника и восьмиугольника



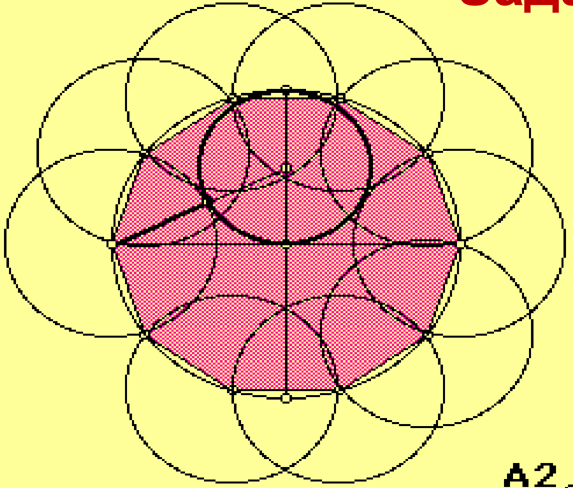


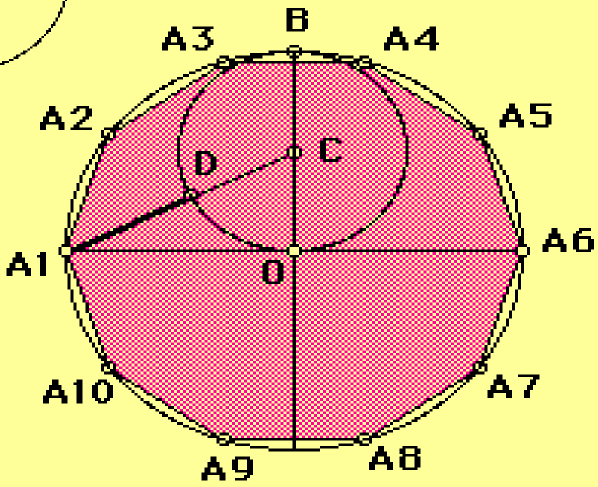
Для того, чтобы построить правильный восьмиугольник нужно сначала построить правильный четырехугольник, например, -квадрат, потом построить биссектрисы углов A1OA3, A3OA5, A5OA7, A7OA1, которые пересекут окружность в точках A2, A4, A6, A8 соответственно, затем последовательно соединить точки A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8. A1A2...A8- искомый восьмиугольник.

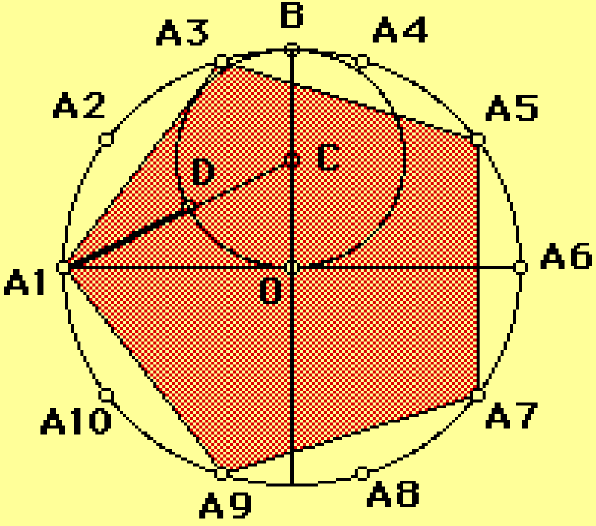
Задача №3. Найти углы правильного десятиугольника и выразить его сторону через радиус R описанной окружности



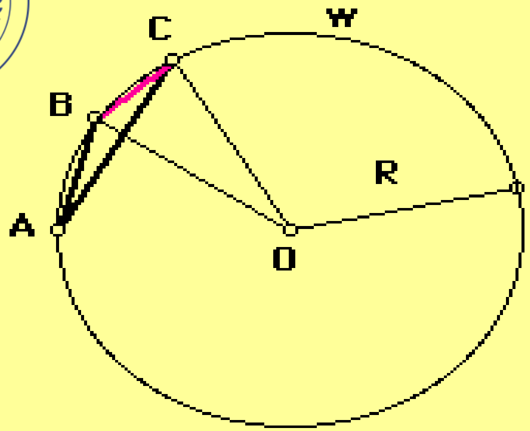
Задача 4. Построение правильного десятиугольника и пятиугольника



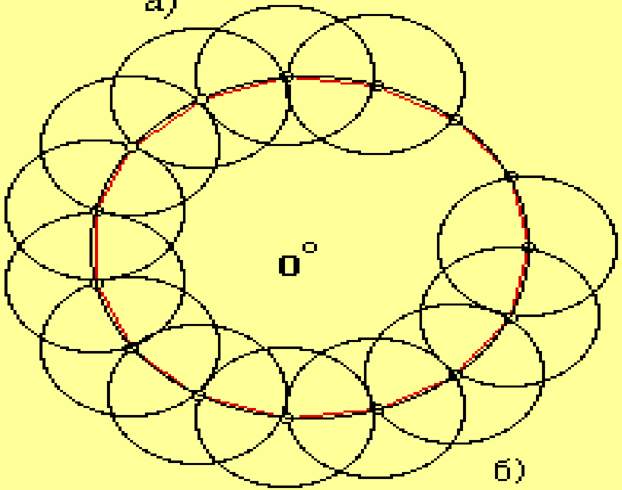




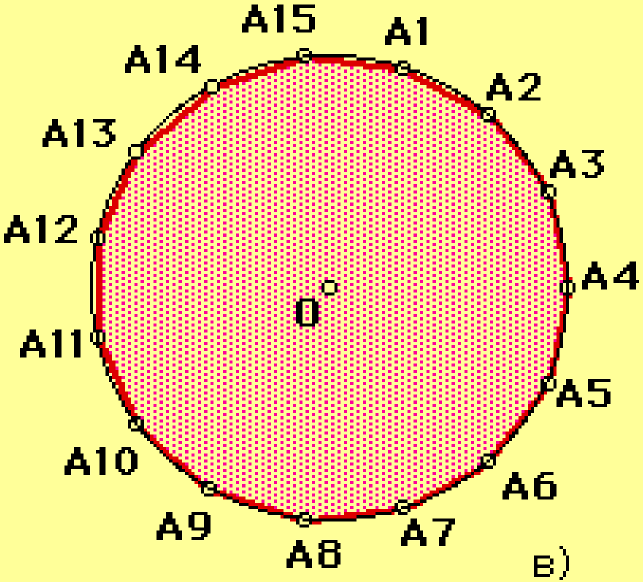
Задача 5. В данную окружность вписать правильный пятнадцатиугольник.



а)



б)



в)

интересные факты по теме

Платоновы тела

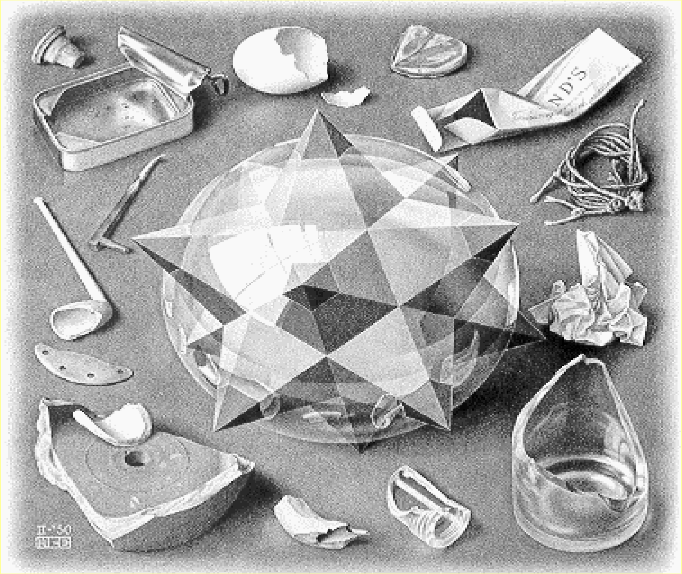
Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников.

Существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями. Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.

Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды интересные факты по теме

"Порядок и хаос"

Большое количество различных многогранников может быть получено объединением правильных многогранников, а также превращением многогранника в звезду. Для преобразования многогранника в звезду необходимо заменить каждую его грань пирамидой, основанием которой является грань многогранника. Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в работе "порядок и хаос". Звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы.



Интересные факты по теме

Гравюра "Звезды"

Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить восприятие всей фигуры. Этот аспект картины является предметом восхищения творчеством Эшера.