



Радиус вписанной и описанной окружности около геометрических фигур



TIAME

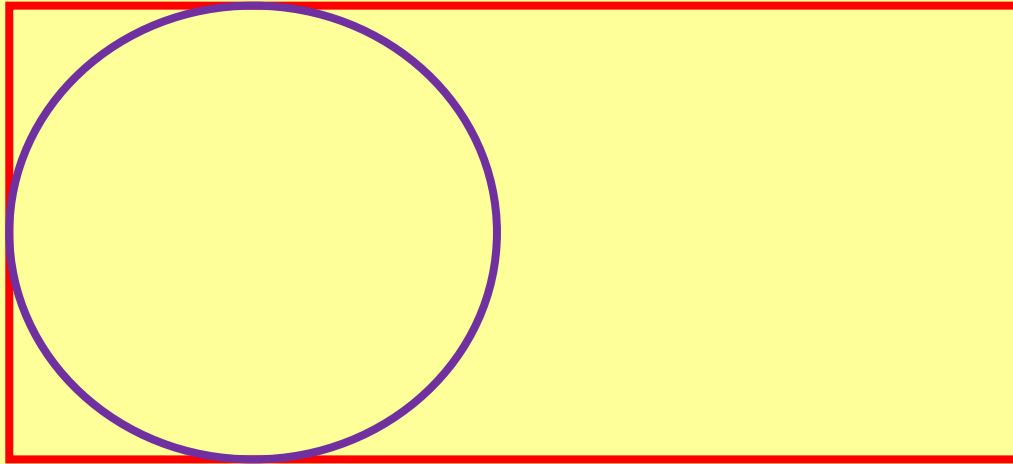
- Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис всех внутренних углов многоугольника.
- Радиус вписанной окружности вычисляется по формуле:

$$r = \frac{S}{p}$$

где S – площадь, а p – полупериметр многоугольника.

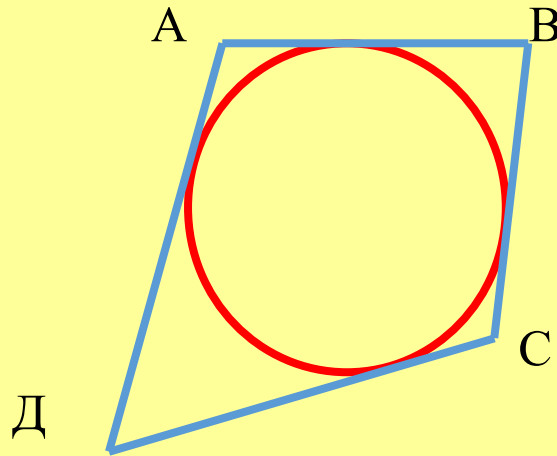


- Не во всякий многоугольник можно вписать окружность.





В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.



$$AB + CD = BC + AD$$

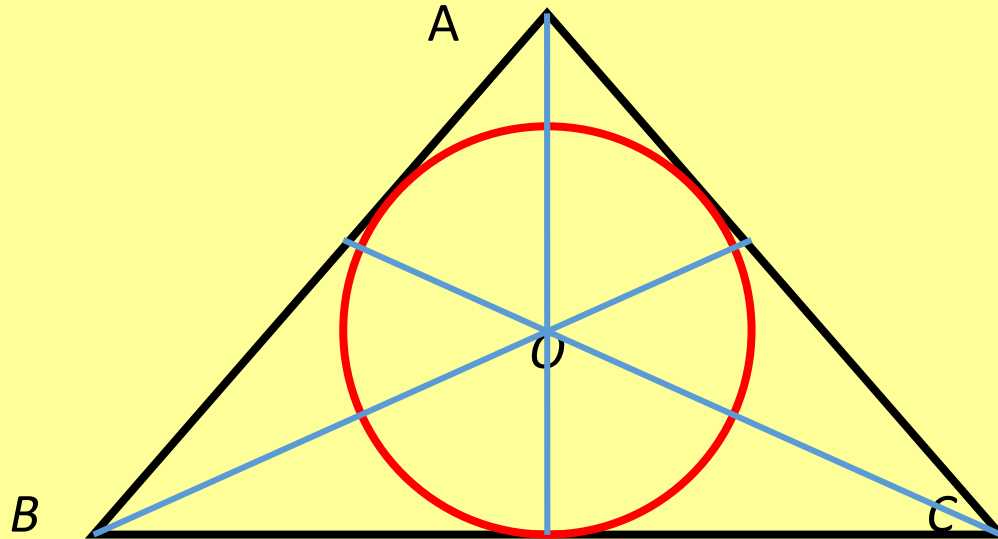
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.



TIAME

В любой треугольник можно вписать окружность.

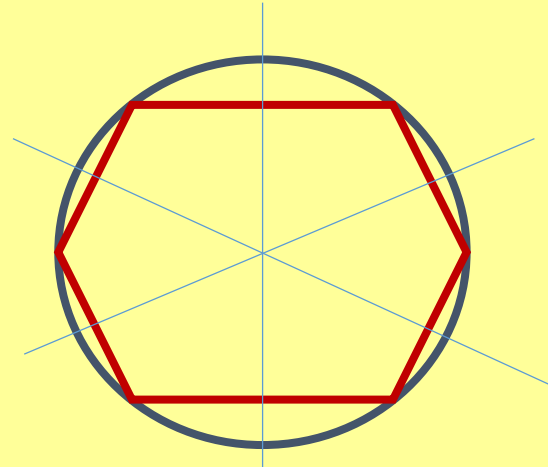
Центр окружности - точка пересечения биссектрис треугольника.





ТИАМЕ

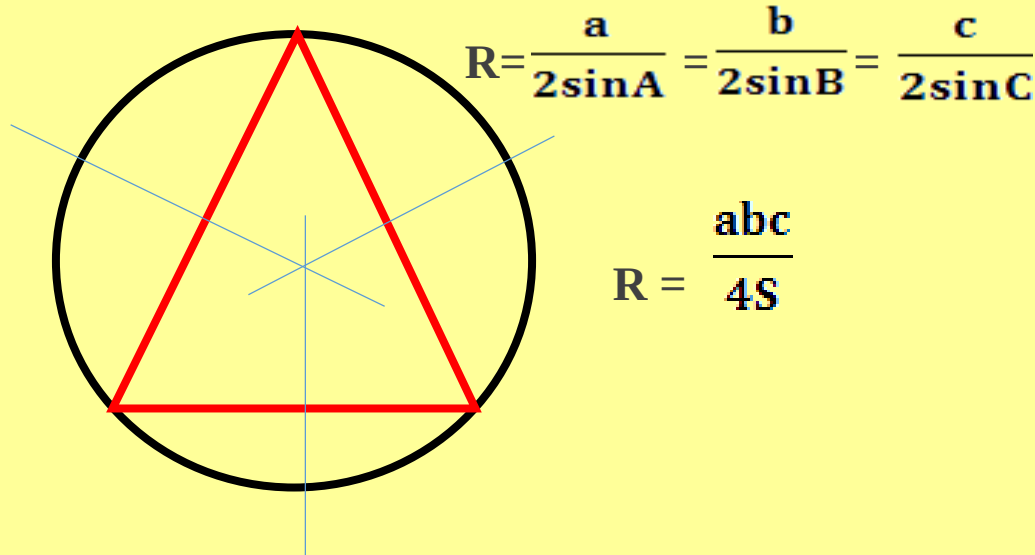
- Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам многоугольника.
- Радиус вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определённого любыми тремя вершинами данного многоугольника.





TIAME

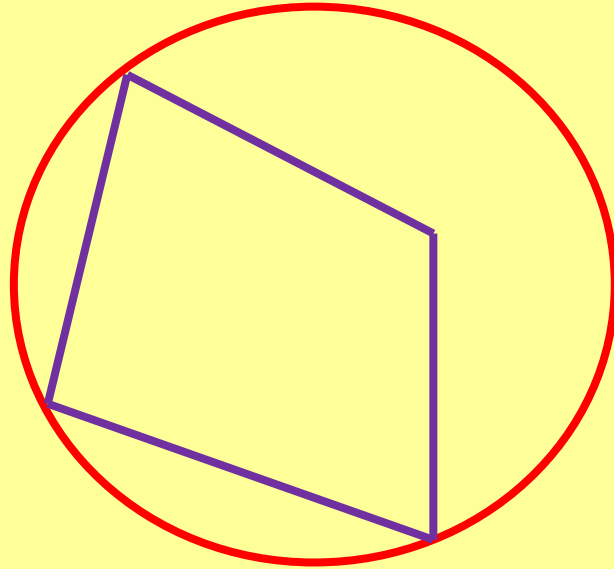
**Около любого треугольника можно описать окружность.
Центр окружности - точка пересечения серединных
перпендикуляров к сторонам треугольника.**





TIAME

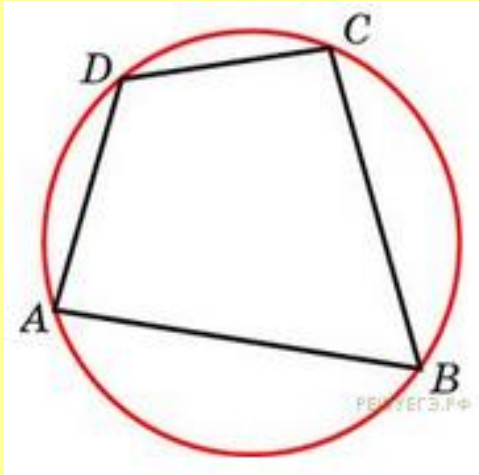
Около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.





TIAME

Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



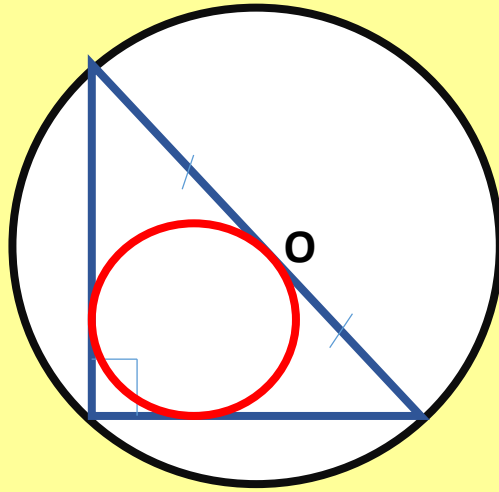
TIAME

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы. (гипотенуза является диаметром)

Радиус вписанной окружности находится по формуле:

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \text{ где } a \text{ и } b - \text{катеты, } c - \text{гипотенуза.}$$

$$R = \frac{d}{2}$$

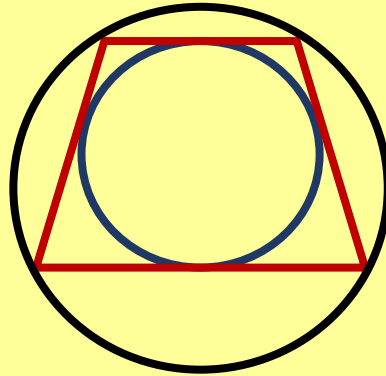




TIAME

Только около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

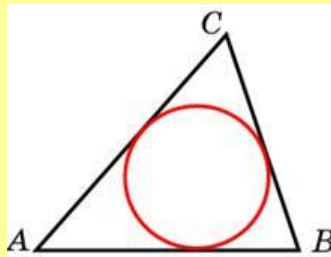
В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна средней линии.





TIAME

Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр этого треугольника.



Решение.

Из формулы $S=pr$, где p - полупериметр, находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу вписанной окружности:

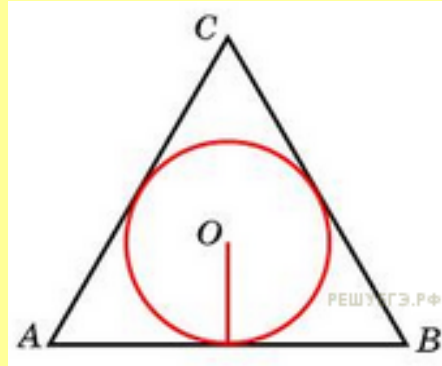
$$P = \frac{2S}{r} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$$

Ответ: 24



TIAME

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



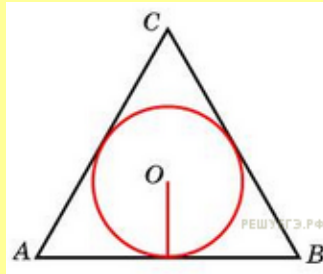
Решение.

Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.



Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



Решение.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3},$$

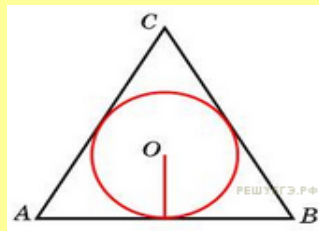
значит, $h = 3r = 18$.

Ответ: 18.



ТИАМЕ

Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение.

Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

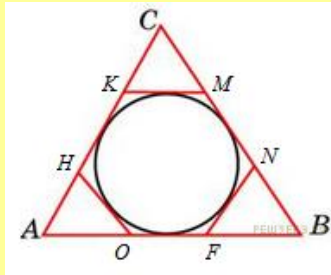
$$r = \frac{S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} = \frac{\sqrt{3} \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

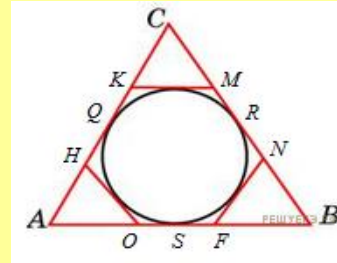


ТИАМЕ

К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Решение.



Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM}, AQ + AS = P_{AHO}, BS + BR = P_{BFN}.$$

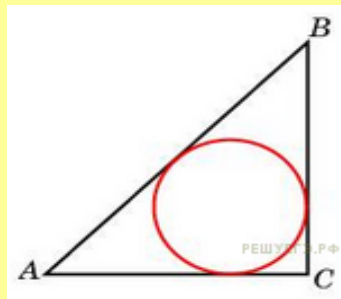
Следовательно, $P_{ABC} = P_{AHO} + P_{CKM} + P_{FNB} = 24.$

Ответ: 24.



TIAME

Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



Решение.

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ: 1.

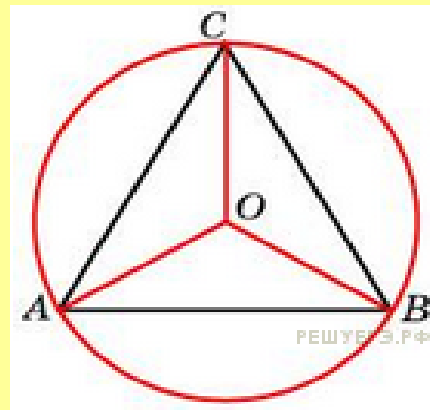
Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

Треугольник правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$R = \frac{AC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.



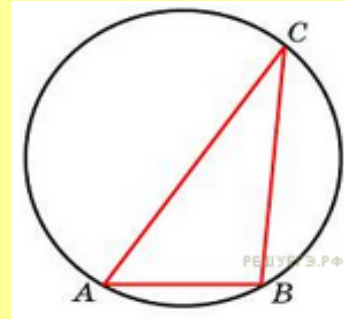


TIAME

Сторона треугольника равна 1. Противлежащий ей угол равен 30° . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

По теореме синусов имеем:



$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle C} = \frac{1}{2 \sin 30^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.



TIAME

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Решение.

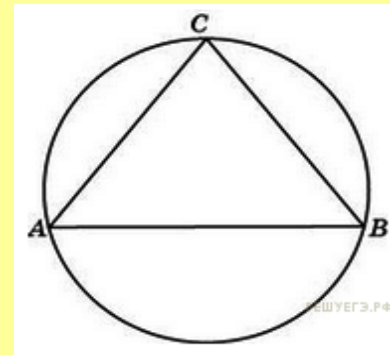
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Для нахождения площади треугольника, воспользуемся формулой Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$R = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16}} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 48}{24 \cdot 8 \cdot 4} = 25.$$

Ответ: 25





ТИАМЕ

Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

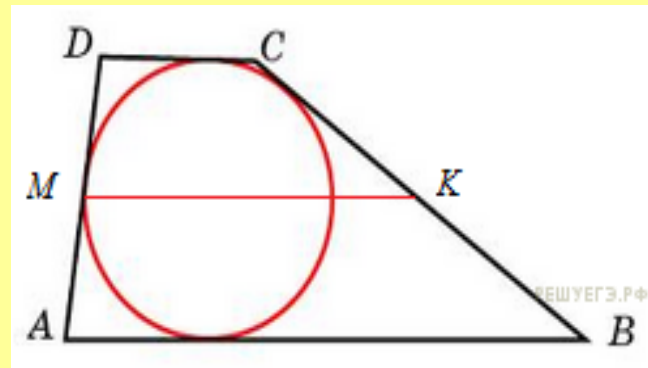
Решение.

В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда

$$AB + CD = BC + AD$$

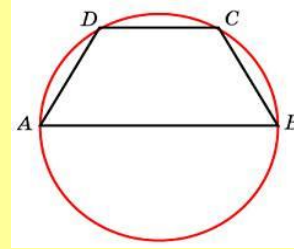
$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ответ: 4.





Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60° , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



TIAME

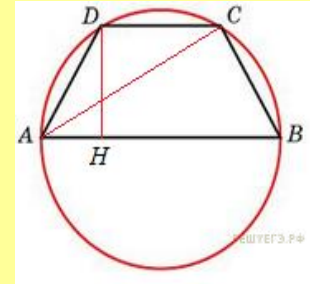
Решение.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120° , углы при основании равны 30° . Найдем его боковую сторону:

$AD = DC = AB - 2AH = AB - 2AD \cos 60^\circ = 12 - AD$, откуда $AD = 6$

$$R = \frac{AD}{2 \sin \angle DCA} = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.





Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82° и 58° . Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

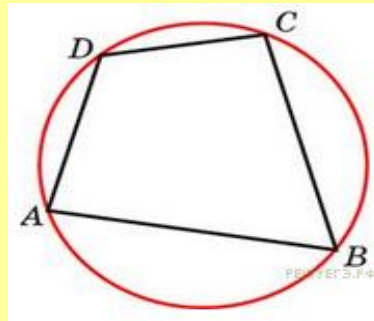


TIAME

Решение.

Так как во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то больший угол равен $180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$

Ответ: 122.





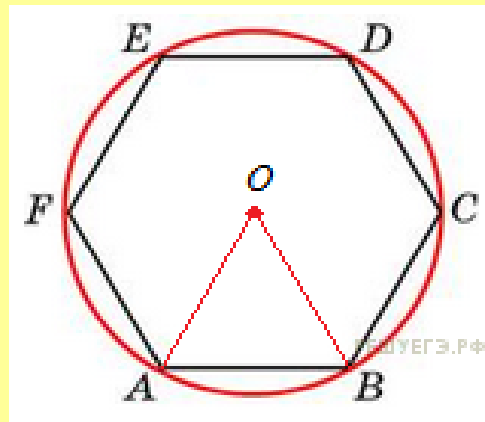
ТИАМЕ

Периметр правильного шестиугольника равен 72.
Найдите диаметр описанной окружности.

Решение.

Рассмотрим треугольник AOB . Он
равносторонний, т.к. $AO=OB=R$ и
угол AOB равен 60° , тогда
 $D=2R=2AO=2AB=2 \cdot 12=24$

Ответ: 24.





Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}/2$, описан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.



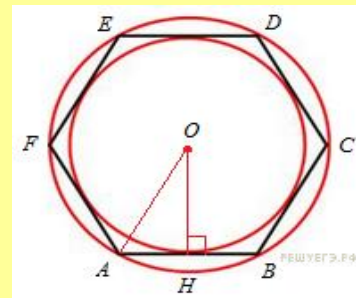
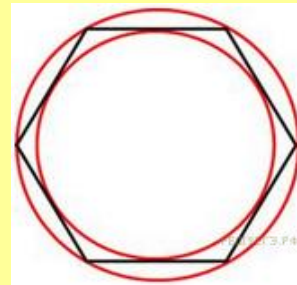
ТИАМЕ

Решение

Угол правильного шестиугольника равен 120° , тогда угол $ОАН$ в прямоугольном треугольнике $ОАН$ равен 60° . Следовательно,

$$R = OA = \frac{OH}{\sin \angle OAH} = \frac{r}{\sin \angle OAH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

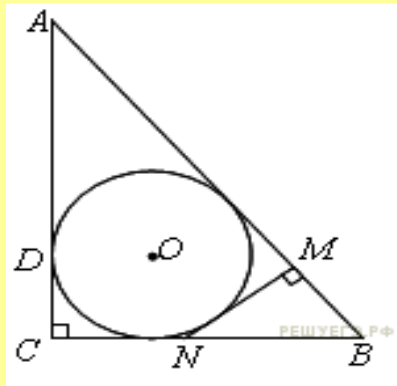
Ответ: 1.





Пусть прямая MN перпендикулярна AB , касается окружности, пересекает AB в точке M , а BC в точке N . Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC . В нём $MN=24$, $BM=57,6$, $BN=62,4$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$MN+AC=CN+AM$; $24+5x=(12x-62,4)+(13x-57,6)$, откуда находим: $x=7,2$.



$$r=2x=14,4$$

Ответ: 20 или 14,4.