



# **Векторы. Действия над векторами**



# Векторная алгебра



Уильям Роуэн Гамильтон  
1805 — 1865  
выдающийся ирландский  
математик и физик XIX века.

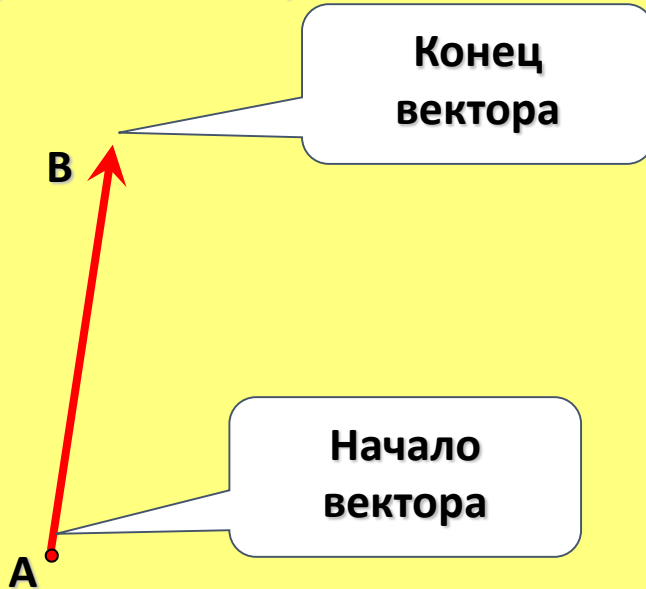
Термин **вектор**  
(от лат. Vector - “несущий”) впервые  
появился в 1845 г. у ирландского математика  
Уильяма Гамильтона



## Определение 1



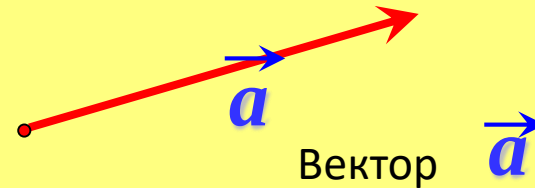
Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется направленным отрезком или вектором



Вектор  $\overrightarrow{AB}$

Длиной или модулем вектора называется длина отрезка AB

$$|\overrightarrow{AB}| = AB$$





## Определение 2



Любая точка плоскости также является вектором.

В этом случае вектор называется нулевым



Вектор  $\overrightarrow{MM}$

Вектор  $\vec{0}$

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определенного направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора.

Длина нулевого считается равной нулю

$$|\overrightarrow{MM}| = 0$$



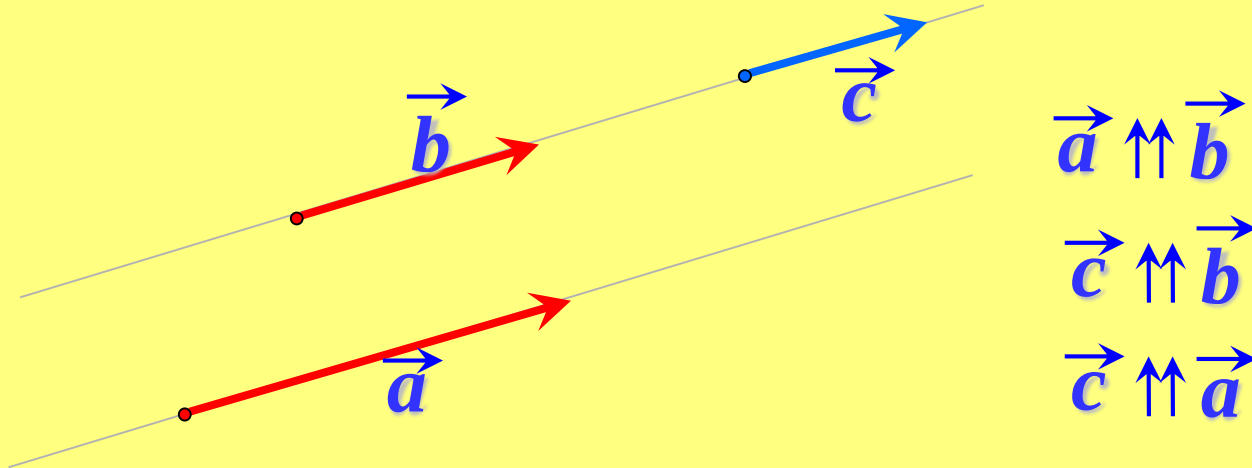
### Определение 3



TIAME

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные, сонаправленные векторы



Нулевой вектор считается коллинеарным, сонаправленным с любым вектором.

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{c}$$

$$\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

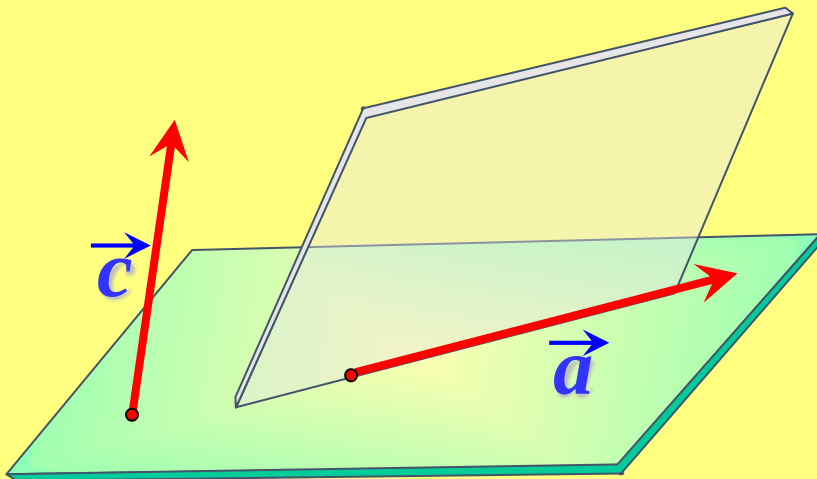


## Определение 5



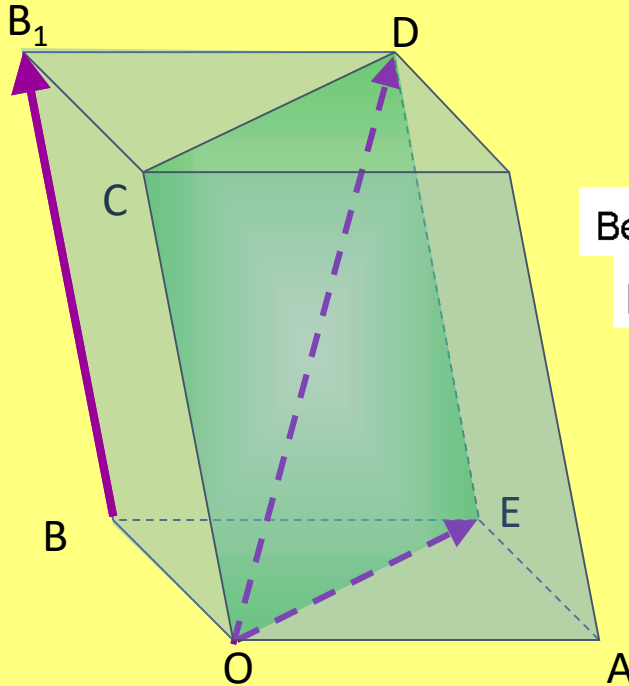
Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



**Любые два вектора  
компланарны.**

Три произвольных вектора могут быть как  
компланарными, так и не компланарными.



Векторы  $\vec{BB_1}$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  не компланарны  
Векторы  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$  и  $\vec{OE}$  компланарны



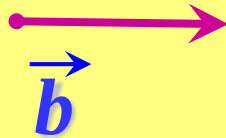
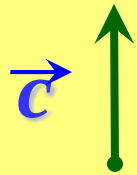
Для коллинеарных векторов

$$\alpha = 0$$

или

$$\alpha = 180^\circ$$

Два вектора называются **ортогональными**,  
если угол между ними равен  $90^\circ$ .



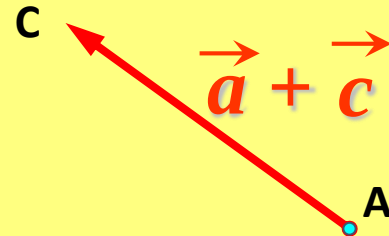
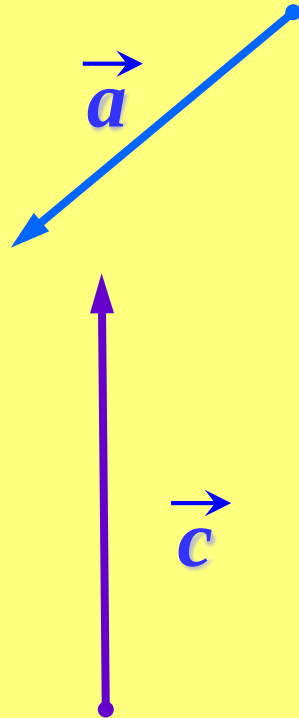
$$\vec{b} \perp \vec{c}$$



## Действия над векторами 1



Сложение векторов. Правило треугольника.



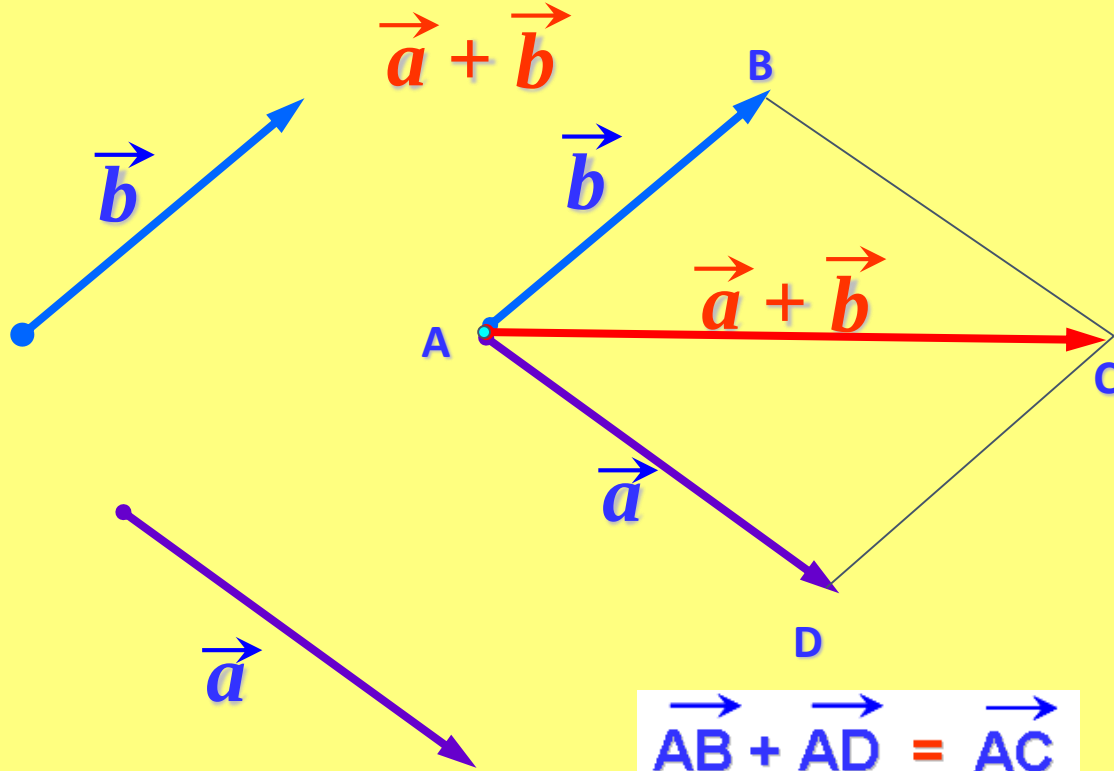


## Действия над векторами 2

Сложение векторов. Правило параллелограмма.



TIAME



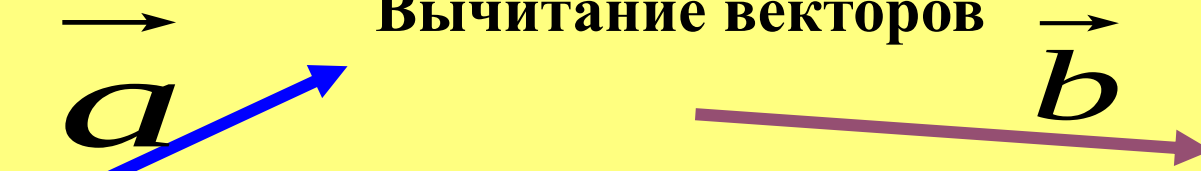


### Действия над векторами 3

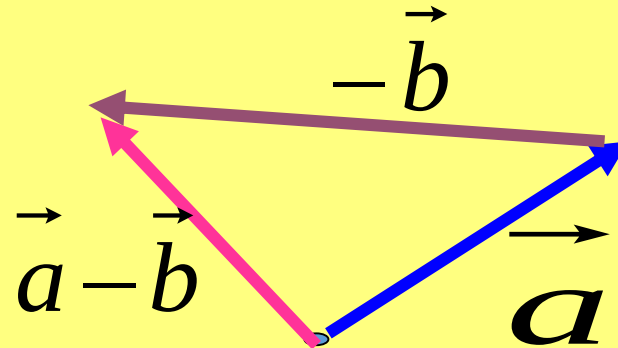


TIAME

Вычитание векторов



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$





## Умножение вектора на число

$$\frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\vec{a}$$



$$\frac{1}{2} \vec{a}$$

$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



$$-\frac{1}{2} \vec{a}$$



TIAME



Рене Декарт

1596 — 1650,

— французский математик,  
создатель аналитической  
геометрии и современной  
алгебраической символики,

Родился в городе Лаэ (ныне г. Декарт).

Декарт ввел математическую  
символику, близкую к современной.  
Коэффициенты он обозначал  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ..., а  
неизвестные —  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Натуральный  
показатель степени принял  
современный вид. Появилась черта  
над подкорненным выражением.

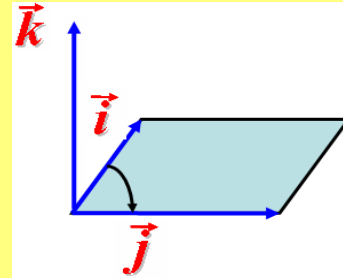
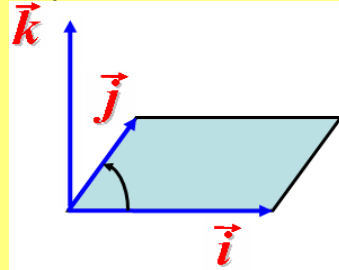


## Декартова система координат



TIAME

Определение. Упорядоченная тройка ортов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  называется *правой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается против часовой стрелки.



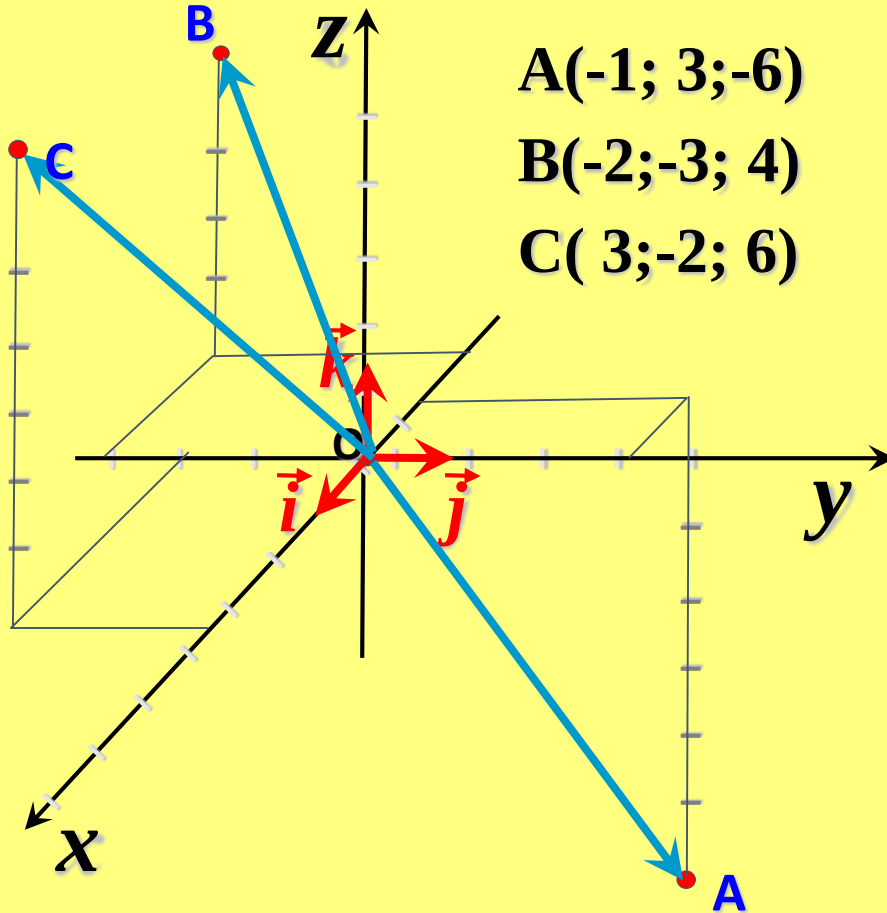
Определение. Упорядоченная тройка ортов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  называется *левой*, если при совмещении начал векторов кратчайший поворот первого вектора ко второму с конца третьего вектора наблюдается по часовой стрелки.



## Декартова система координат



TIIAME



$A(-1; 3; -6)$

$B(-2; -3; 4)$

$C(3; -2; 6)$

$\vec{OA}\{-1; 3; -6\}$

$\vec{OB}\{-2; -3; 4\}$

$\vec{OC}\{3; -2; 6\}$

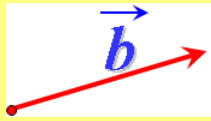


TIAME

### Задача



Пусть два вектора  $\vec{a} \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\vec{b} \{b_x, b_y, b_z\}$  коллинеарны.



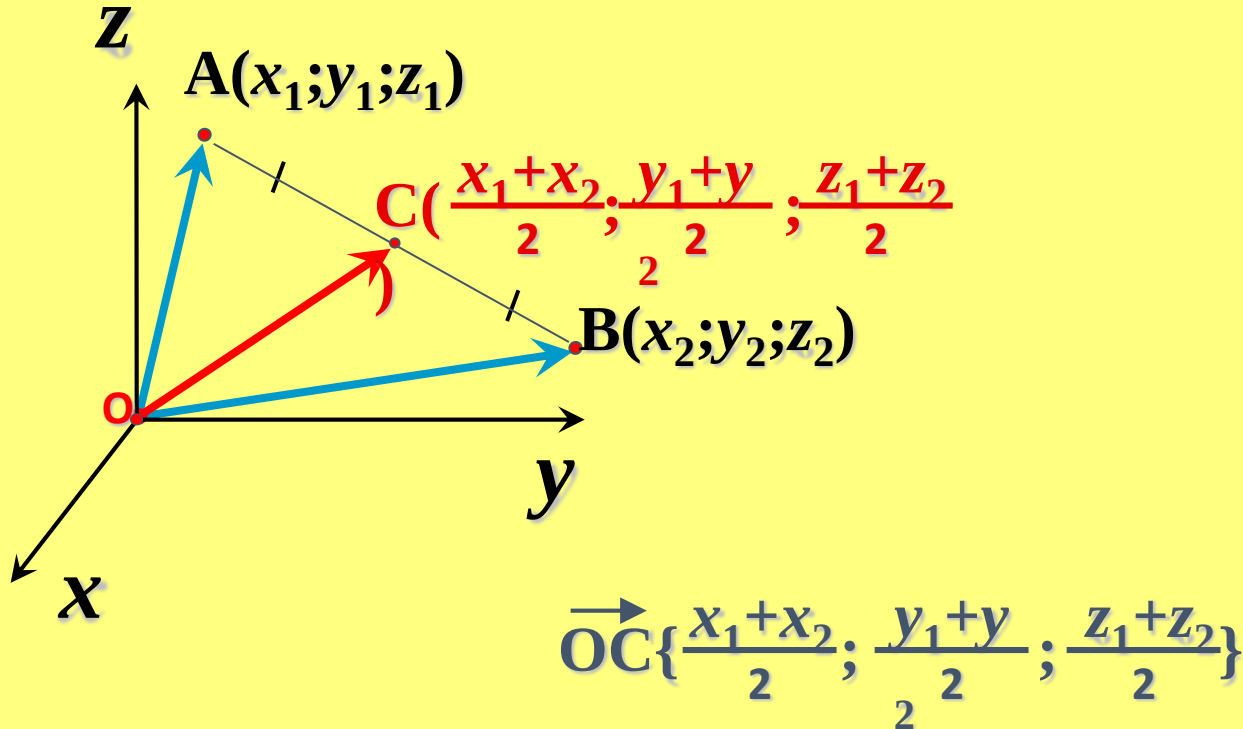
Тогда по теореме существует такое число  $\lambda$ , при котором  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , т. е.  $a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \lambda (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$ ,

$$\text{откуда} \quad \left. \begin{aligned} a_x &= \lambda b_x \\ a_y &= \lambda b_y \\ a_z &= \lambda b_z \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

– условие коллинеарности двух векторов.

**Если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.**

В частности, координаты середины отрезка ( $\lambda=1$ ) равны полусумме соответствующих координат его концов.

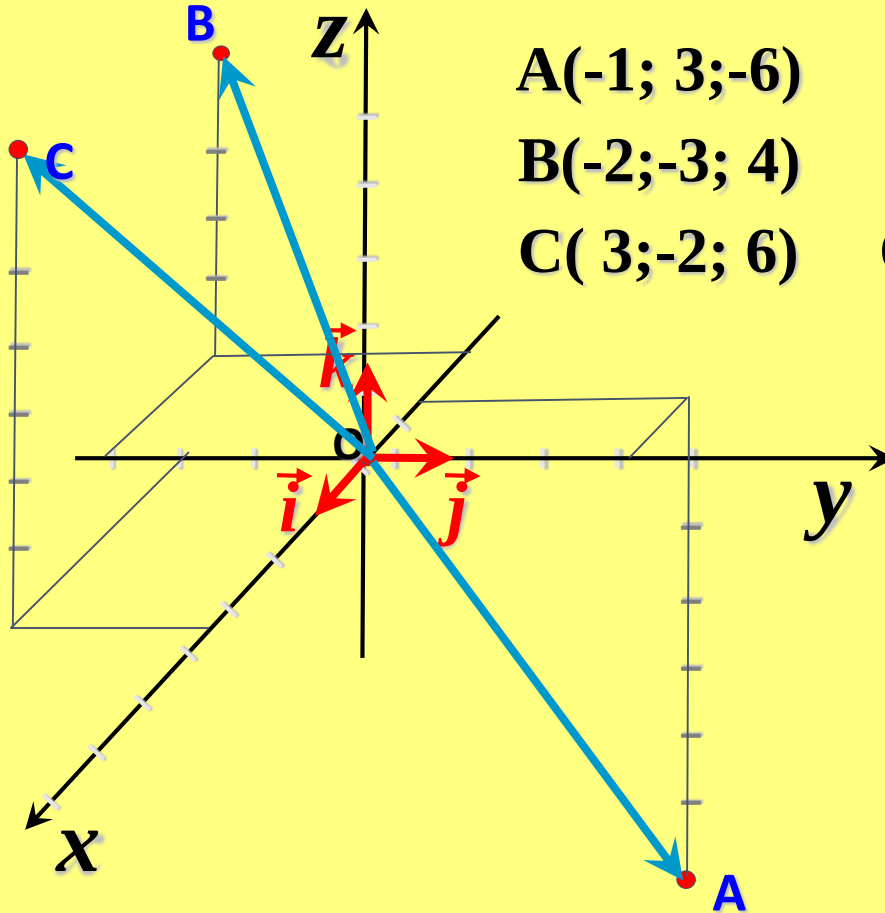




## Декартова система координат



TIIAME



$$A(-1; 3; -6) \quad \vec{OA}\{-1; 3; -6\}$$

$$B(-2; -3; 4) \quad \vec{OB}\{-2; -3; 4\}$$

$$C(3; -2; 6) \quad \vec{OC}\{3; -2; 6\}$$



## Проекция вектора на ось



TIAME

**Пример 1.** Даны точки  $A(1, -1, 2)$  и  $B(3, 2, 3)$ .

Найти: Координаты вектора  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB}\{3-1, 2-(-1), 3-2\} = \overline{AB}\{2, 3, 1\}.$$

Найти: Длину вектора  $\overline{AB}$ :

Так как  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ , значит  $|\overline{AB}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ .

Найти: Разложение вектора  $\overline{AB}$  по базису;

Так как  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ , значит  $\overline{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ .

Найти: Направляющие косинусы вектора  $\overline{AB}$ :

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Найти: Единичный вектор (орт), соответствующий вектору  $\overline{AB}$ :

Так как  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ , значит  $\vec{a}^0 \left\{ \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right\}$ .