10-урок: ГЕОМЕТРИЯ

(лекционная занятие)

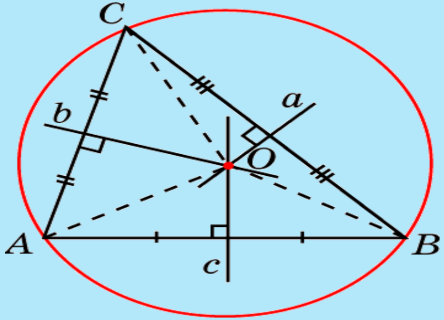
1 курс

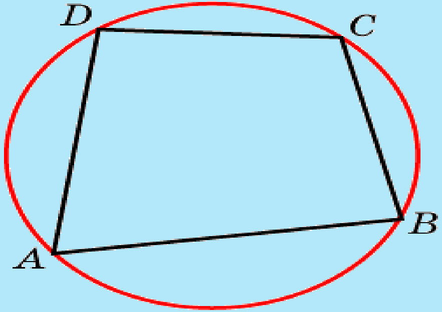
ТЕМА: Вписанные и описанные треугольники.
Замечательные точки треугольника.
Вписанные и описанные четырехугольники.

Вписанные многоугольники

Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины принадлежат окружности. Окружность при этом называется описанной около многоугольника.

Теорема 1. Около всякого треугольника можно описать окружность. Ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



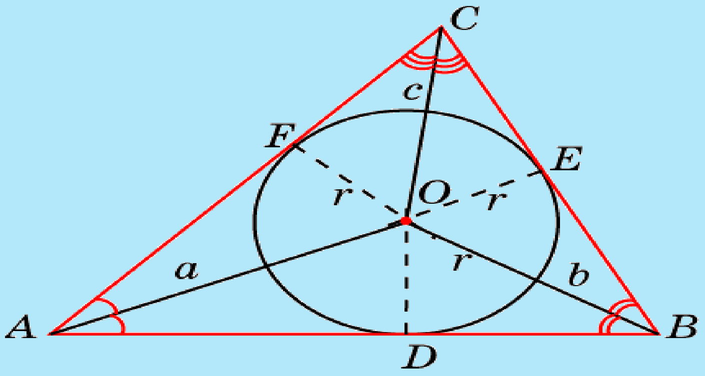


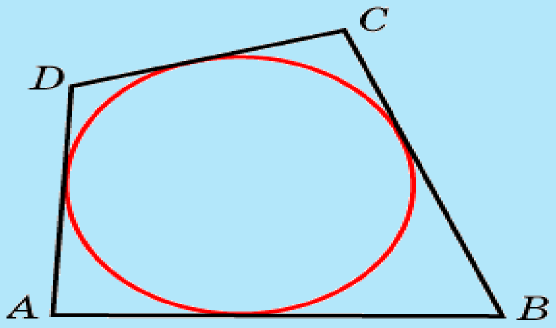
Теорема 2. Суммы противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равны 180^{o}.

Описанные многоугольники

Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. Сама окружность при этом называется вписанной в многоугольник

Теорема 3. В любой треугольник можно вписать окружность. Ее центром будет точка пересечения биссектрис этого треугольника.





Теорема 4. Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

Вписанные и описанные треугольники

Теорема 5. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Теорема 6. Радиус R окружности, описанной около правильного треугольника, выражается формулой $R = \frac{2S}{a+b+c}$, где a, b, c – стороны треугольника S – его площадь.

Теорема 7. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, выражается формулой $r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника S – его площадь.

Вписанная и описанная окружность около треугольника.

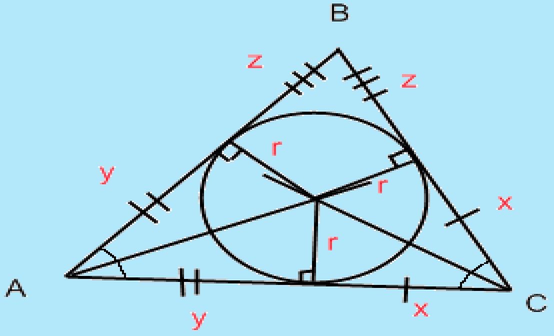
Треугольник. Вписанная окружность.

1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.

3) $r = \frac{S\Delta}{p}$, p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности

В правильном треугольнике

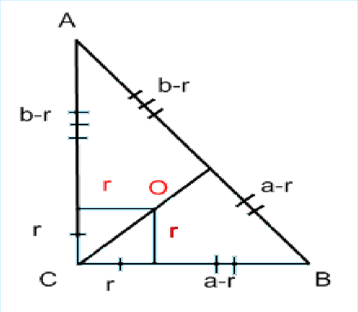
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



C – гипотенуза

$$C = p - r$$

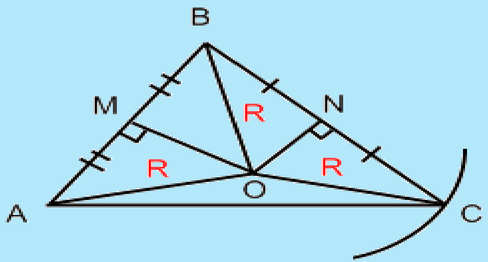
p - полупериметр



$$r = \frac{a+b+c}{2}$$

Треугольник. Описанная окружность.

1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

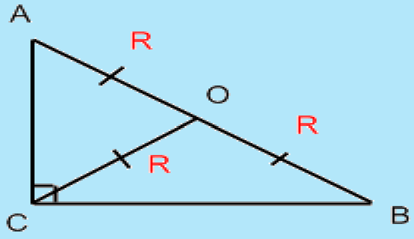


$$\angle AOB = 2\angle C$$

2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

3) Центр окружности, описанной около Прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.

$$R = \frac{1}{2} AB$$

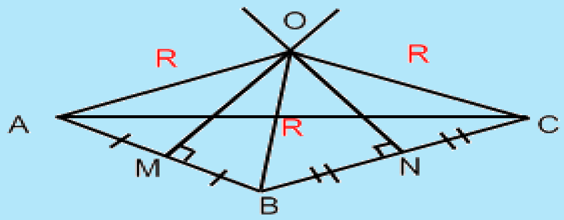


Треугольник. Описанная окружность

4) R – радиус описанной окружности
R=OA=OB=OC в любом треугольнике.

5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ **- Для правильного треугольника**



$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S\Delta}$$

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

Замечательные точки треугольника — точки, местоположение которых не зависит от того, в каком порядке берутся стороны треугольника.

В школьном курсе геометрии изучаются 4 замечательные точки треугольника: *точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения высот.*

Кроме этого существует *девять* особых точек: *середины сторон, основания высот, середины отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) с вершинами треугольника.*

Примеры точек.

Замечательными точками треугольника являются точки пересечения:

Медиан — центроид

Высот — ортоцентр

Биссектрис — инцентр (центр вписанной окружности)

Серединных перпендикуляров — центр описанной окружности.

Медиана треугольника.

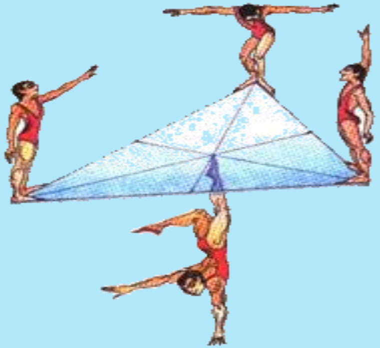
- ***Точка пересечения медиан является его центром масс или <u>центром тяжести треугольника</u>, или <u>барицентром</u>.***

- *Точкой пересечения медианы делятся на две части в отношении 2:1, считая от вершины.*

- *Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.*

- *Большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана.*

- *Из векторов, образующих медианы, можно составить треугольник.*

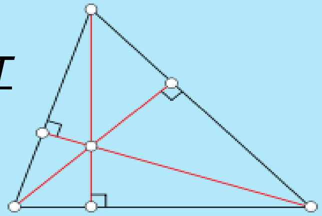


Высота треугольника.

- **Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой _ортоцентром_.**

- *В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.*

- *В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.*



- Основания высот образуют так называемый ортотреугольник, обладающий собственными свойствами.

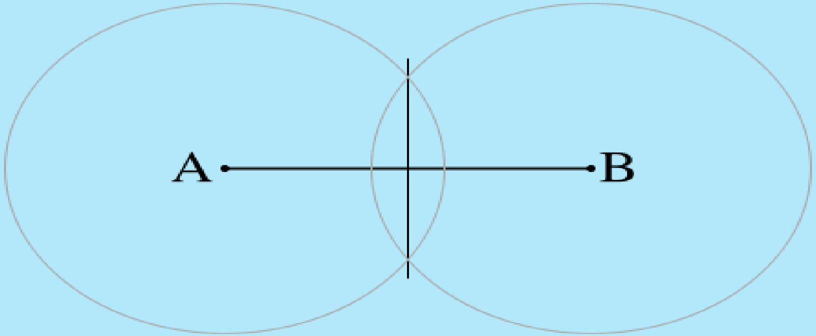
Биссектриса треугольника.

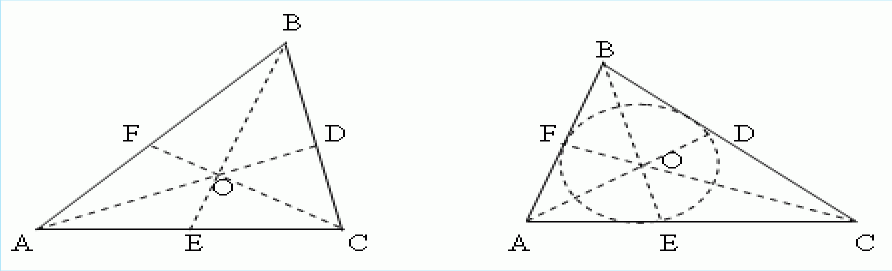
- ***Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — <u>инцентре</u> — центре вписанной в этот треугольник окружности.***

- Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка — центр одной из трёх вневписанных окружностей этого треугольника.
- Основания биссектрис двух внутренних и одного внешнего углов треугольника лежат на одной прямой, если биссектриса внешнего угла не параллельна противоположной стороне треугольника.
- Если биссектрисы внешних углов треугольника не параллельны противоположным сторонам, то их основания лежат на одной прямой.

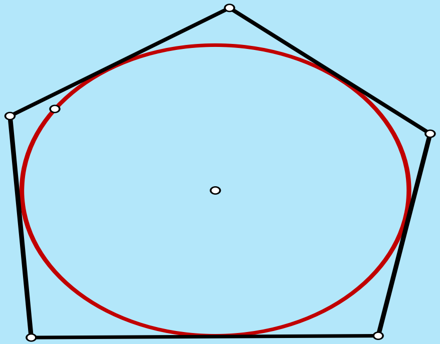
Серединный перпендикуляр треугольника.

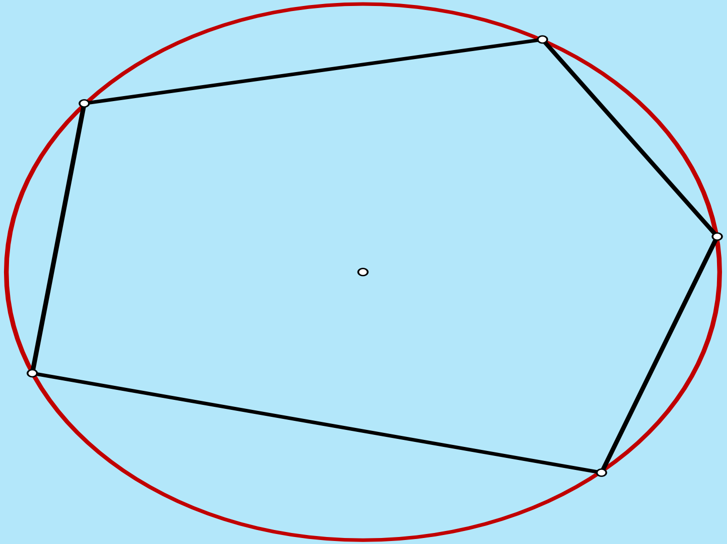
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника или другого описываемого окружностью многоугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.





Вписанная и описанная окружности





Свойство четырехугольника описанного около окружности

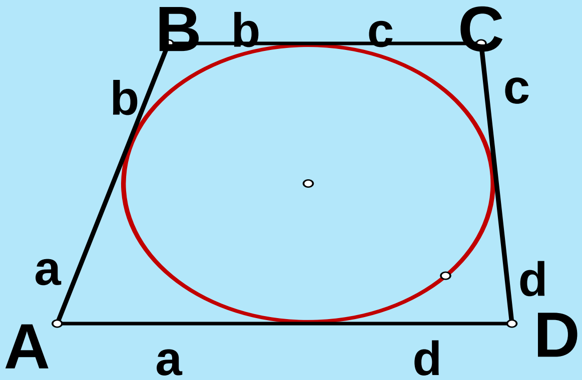
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

AB+CD=BC+AD

Доказательство.

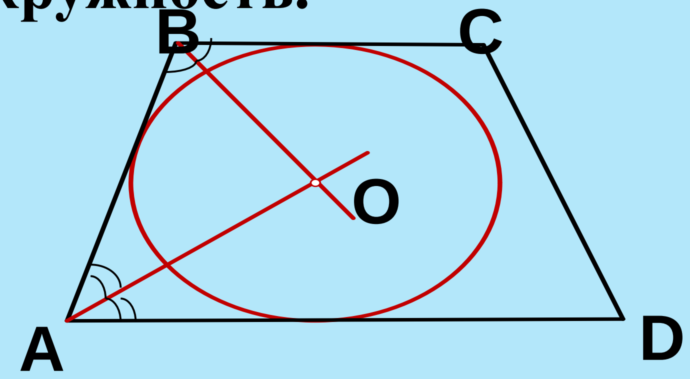
AB+CD=a+b+c+d, BC+AD=a+b+c+d,

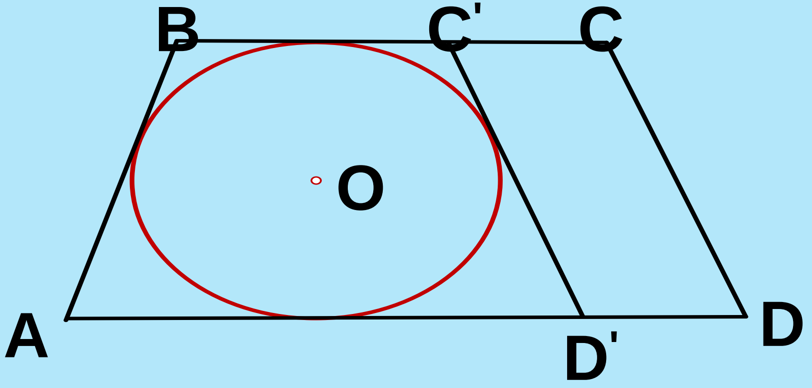
Поэтому AB+CD=BC+AD.



Обратное утверждение

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

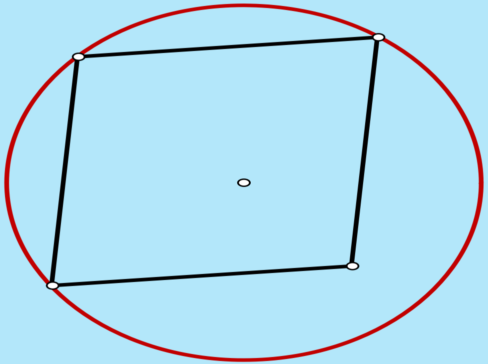


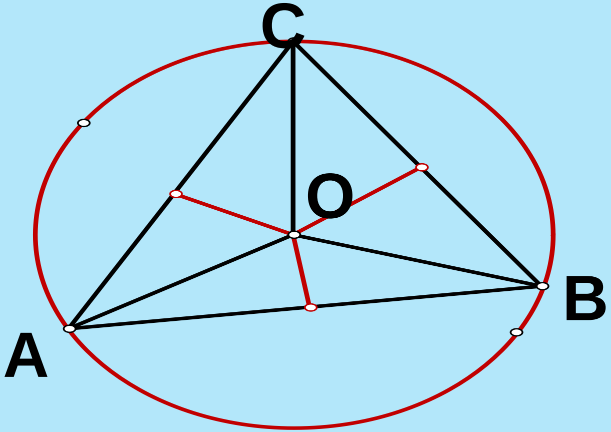


Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

В отличие от треугольника около четырехугольника не всегда можно описать окружность.





Свойство четырехугольника вписанного в окружность

В любом вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равна 180^0.

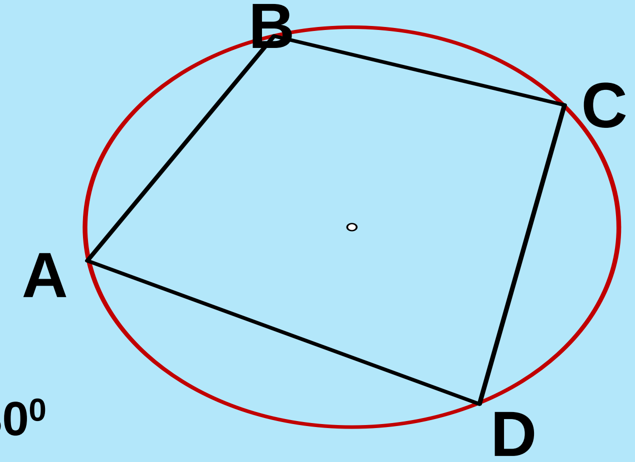
$\angle A+\angle C=180^0$, $\angle B+\angle D=180^0$

Доказательство.

По теореме о вписанном угле имеем

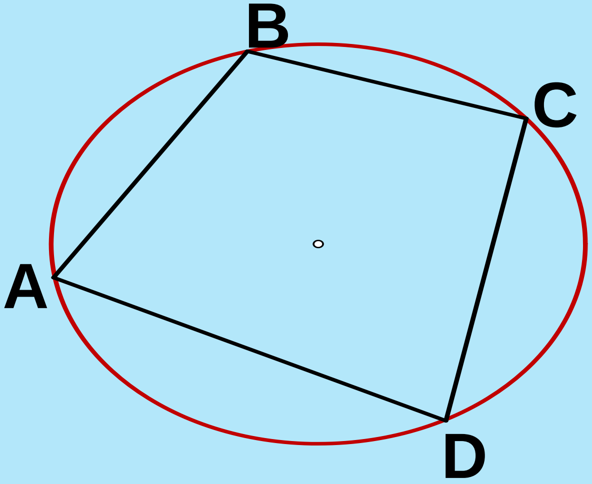
$\angle A=\frac{1}{2}\smile BCD$, $\angle C=\frac{1}{2}\smile BAD$, откуда следует

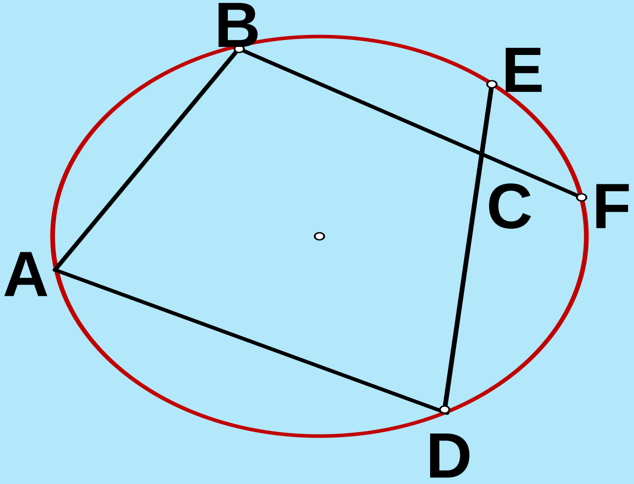
$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\smile BCD+\smile BAD)=\frac{1}{2}\cdot 360^0=180^0$



Обратное утверждение

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180^0, то около него можно описать окружность.





Вопросы для повторения:

1. Что называется вписанной окружностью?
2. Что является центром вписанной окружности?
3. В любой ли треугольник можно вписать окружность?